Coulomb, el. Feld, Potenzial

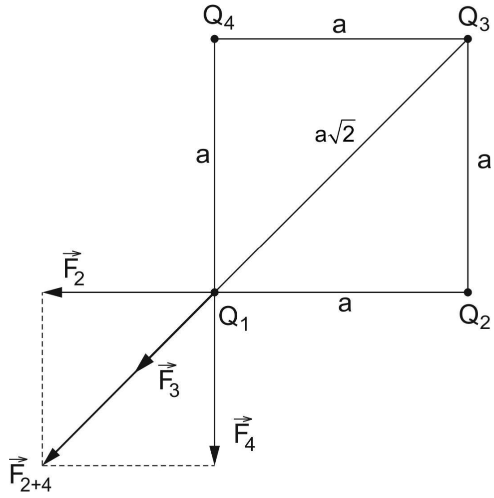
Klasse 11 / 12

- Lösungen -

1. geg.: Seitenlänge des Quadrats a
Ladungen $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q$

ges.: Größe und Richtung der Kraft, mit der jeweils drei Ladungen auf die vierte wirken.

Lös.: Ansatz: Coulomb-Gesetz



$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

mit $Q_1 = Q_2 = Q$ und $r = a$ erhält man:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2}$$

Auf Q_1 wirken: Q_2 mit der Kraft $\vec{F}_2$
Q_3 mit der Kraft $\vec{F}_3$
Q_4 mit der Kraft $\vec{F}_4$

Die Kräfte $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_4$ haben beide den gleichen Betrag, der Abstand zwischen Q_1 und Q_2 bzw. Q_4 ist jeweils a; somit gilt:

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2}$$

Beide Kräfte werden zusammengefasst (Pythagoras im Kräfteparallelogramm) zur Resultierenden F_{2+4}:

$$\left(F_{2+4}\right)^2 = \left(F_2\right)^2 + \left(F_4\right)^2$$

$$\left(F_{2+4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2}\right)^2 \cdot 2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\underline{F_{2+4} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2} \cdot \sqrt{2}}$$

Die Kraft $\vec{F}_3$ hat den Betrag:

$$F_3 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\underline{F_3 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2}}$$

Die Gesamtkraft $\vec{F}_{ges}$ die auf Q_1 wirkt, setzt sich zusammen aus der Resultierenden $\vec{F}_{2+4}$ und der Kraft $\vec{F}_3$. Beide Kräfte wirken in Diagonalenrichtung (von Q_3 nach Q_1):

$$F_{ges} = F_{2+4} + F_3$$

$$F_{ges} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{a^2}\cdot\sqrt{2} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\underline{F_{ges} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{a^2}\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$\vec{F}_{ges}$ wirkt in Richtung der Quadratdiagonalen (von Q_3 nach Q_1).

2. geg.: Ladungen $Q_1 = 5\cdot 10^{-8}\,\text{As}$; $Q_2 = -3\cdot 10^{-9}\,\text{As}$

Abstand der Ladungen $r = 0{,}8\,\text{m}$

a) ges.: Betrag der Kraft, die Q_2 auf Q_1 ausübt

Lös.: Den Betrag der Kraft zwischen zwei Ladungen erhält man nach dem Gesetz von Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{|Q_1|\cdot|Q_2|}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}\cdot\frac{5\cdot 10^{-8}\,\text{As}\cdot 3\cdot 10^{-9}\,\text{As}}{(0{,}8\,\text{m})^2} = 0{,}21065\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{VAs}}{\text{m}}$$

$$\underline{F = 2{,}1\cdot 10^{-6}\,\text{N}}$$

b) ges.: Betrag der Kraft, die Q_1 auf Q_2 ausübt

Lös.: Die Kraft zwischen zwei Ladungen wirkt auf beide gleich; somit ergibt sich hier ebenfalls $\underline{F = 2{,}1\cdot 10^{-6}\,\text{N}}$.

c) ges.: Betrag der elektrischen Feldstärke im Mittelpunkt der Verbindungslinie zwischen Q_1 und Q_2.

Lös.: Eine kleine Probeladung zwischen zwischen Q_1 und Q_2 wird von der einen Ladung angezogen und von der anderen Ladung abgestoßen. Beide Kräfte zeigen in die gleiche Richtung. Ebenso zeigen die Feldstärken in die gleiche Richtung. Damit kann man für die Berechnung der el. Feldstärke die Beträge der Ladungen ansetzen. Die elektrische Feldstärke in der Mitte zwischen Q_1 und Q_2 ist die Summe der beiden Einzelfeldstärken:

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{|Q_1|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{|Q_2|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{|Q_1|+|Q_2|}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}\cdot\frac{5\cdot 10^{-8}\,\text{As}+3\cdot 10^{-9}\,\text{As}}{(0{,}4\,\text{m})^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As} + 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}}{(0{,}4\,\mathrm{m})^2} = 2{,}9772 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{E = 3\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}}$$

3. geg.: Punktladungen $Q_1 = 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}$, $Q_2 = 6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}$
Abstand der Ladungen $a = 8\,\mathrm{cm}$

a) ges.: Betrag der el. Feldstärke in M

Lös.: Im Punkt M wirken die beiden Feldstärken E_{1-M} und E_{2-M}, die durch die Ladungen Q_1 und Q_2 hervorgerufen werden. Weil beide Ladungen positiv sind, stoßen sie sich gegenseitig ab.

Betrag der Feldstärken:

$$E_{1-M} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{Q_1}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2}$$

$$E_{2-M} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{Q_2}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2}$$

Die beiden Feldstärken überlagern sich. Wegen der Abstoßung gilt:

$$E_M = E_2 - E_1$$

$$E_M = \frac{Q_2}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2} - \frac{Q_1}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2} = \frac{Q_2 - Q_1}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2}$$

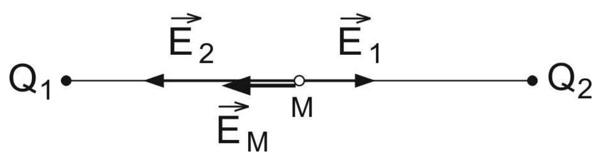
$$E_M = \frac{6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As} - 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}}{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot \left(8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}$$

$$E_M = \frac{3}{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 64} \cdot 10^{-9+12+4}\,\frac{\mathrm{As} \cdot \mathrm{Vm}}{\mathrm{As} \cdot \mathrm{m}^2} = 0{,}001685 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{E_M = 17\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}}$$

b) ges.: Richtung der (resultierenden) Feldstärke E_M im Punkt M

Lös.: Die Feldstärke E_M wirkt in Richtung Q_1.



c) ges.: Potenzial φ_M im Punkt M

Lös.: Das Potenzial im Punkt M ist die Summe der Einzelpotenziale:

$$\varphi_M = \varphi_{1-M} + \varphi_{2-M}$$

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a}\cdot Q_1 + \frac{2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a}\cdot Q_2$$

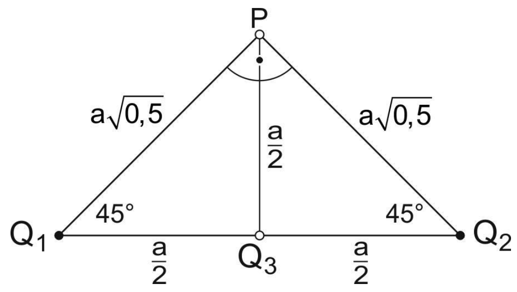
$$\varphi_M = \frac{Q_1+Q_2}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a} = \frac{3\cdot10^{-9}\,\text{As}+6\cdot10^{-9}\,\text{As}}{2\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot8\cdot10^{-2}\,\text{m}}$$

$$\varphi_M = \frac{9}{2\pi\cdot8{,}854\cdot8}\cdot10^5\ \text{V} = 0{,}02022\cdot10^5\ \text{V}$$

$$\underline{\varphi_M = 2{,}0\ \text{kV}}$$

d) ges.: Größe der Ladung Q_3

Lös.: Das Gesamtpotenzial im Punkt P ist die Summe der Einzelpotenziale, hervorgerufen durch die Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3:



$$\varphi_P = \varphi_{1-P} + \varphi_{2-P} + \varphi_{3-P} \qquad \text{mit } \varphi_P = 0$$

$$0 = \varphi_{1-P} + \varphi_{2-P} + \varphi_{3-P}$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q_1}{a\sqrt{0,5}} + \frac{Q_2}{a\sqrt{0,5}} + \frac{Q_3}{0{,}5a}\right)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a}\cdot\left(\frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{0,5}} + \frac{Q_3}{0{,}5}\right) \qquad \Big|\ :\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a}$$

$$0 = \frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{0,5}} + \frac{Q_3}{0{,}5} \qquad \Big|\ \cdot0{,}5$$

$$Q_3 = -\frac{0{,}5}{\sqrt{0,5}}\cdot\left(Q_1+Q_2\right)$$

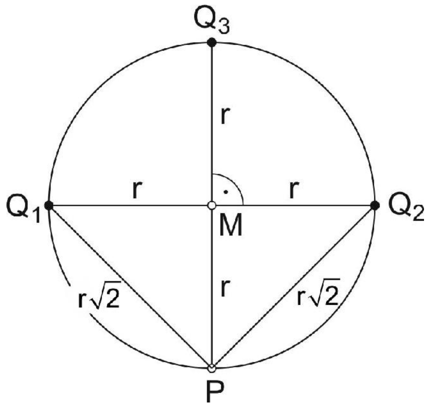
$$Q_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\left(9\cdot10^{-9}\,\text{As}\right)$$

$$\underline{Q_3 = -6{,}4\cdot10^{-9}\,\text{As}}$$

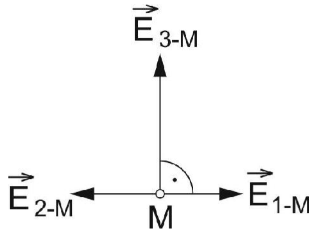
- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

4. geg.: Punktladungen $Q_1 = Q_2 = +75\,\text{nC}$, $Q_3 = -150\,\text{nC}$
Kreisradius $r = 4{,}0\,\text{cm}$

a) ges.: El. Feldstärke in M
El. Feldstärke in P



Lös.: Im **Punkt M** wirken die drei Feldstärken E_{1-M}, E_{2-M} und E_{3-M}, die durch die Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 hervorgerufen werden. Weil Q_1 und Q_2 beide positiv und gleich groß sind, stoßen sie sich gegenseitig ab und heben sich gegenseitig auf (siehe Bild rechts).
Für die Berechnung der Feldstärke in M ist somit nur noch die Ladung Q_3 von Bedeutung:



$$E_M = E_{2-M} - E_{1-M} + E_{3-M} \qquad \text{mit } E_{2-M} = E_{1-M}$$

$$E_M = E_{3-M}$$

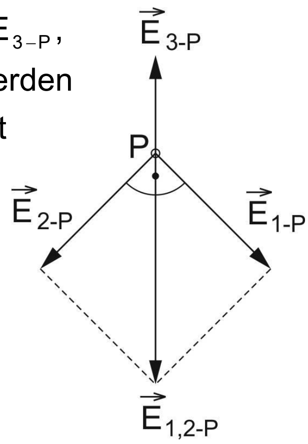
$$E_M = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{|Q_3|}{r^2}$$

$$E_M = \frac{|-150\,\text{nC}|}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}$$

$$E_M = \frac{150}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 16} \cdot 10^{12+4-9}\,\frac{\text{As} \cdot \text{Vm}}{\text{As} \cdot \text{m}^2} = 0{,}0843 \cdot 10^7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\underline{\underline{E_M = 843\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}}}$$

Im **Punkt P** wirken die drei Feldstärken E_{1-P}, E_{2-P} und E_{3-P}, die durch die Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 hervorgerufen werden (siehe Bild rechts). E_{1-P}, E_{2-P} werden zusammengefasst zur Resultierenden $E_{1,2-P}$.
Feldstärke im Punkt P:



$$\left(E_{1,2-P}\right)^2 = \left(E_{1-P}\right)^2 + \left(E_{2-P}\right)^2 \qquad \text{mit } E_{2-P} = E_{1-P}$$

$$\left(E_{1,2-P}\right)^2 = 2 \cdot \left(E_{1-P}\right)^2 \qquad \Big|\sqrt{}$$

$$\underline{E_{1,2-P} = \sqrt{2} \cdot E_{1-P}}$$

$$E_P = E_{1,2-P} + E_{3-P}$$

$$E_P = \sqrt{2} \cdot E_{1-P} + E_{3-P}$$

$$E_P = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{\left(r\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{(2r)^2}$$

$$E_P = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \sqrt{2}}{2r^2} + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{4r^2}$$

$$E_P = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1 \cdot 2\sqrt{2} + Q_3}{4r^2} \right)$$

$$E_P = \frac{\sqrt{8} \cdot Q_1 + Q_3}{16\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$E_P = \frac{\sqrt{8} \cdot 75\,\text{nC} + (-150\,\text{nC})}{16\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \left(4 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2}$$

$$E_P = \frac{62{,}13}{16\pi \cdot 8{,}854 \cdot 16} \cdot 10^{12+4-9}\,\frac{\text{As} \cdot \text{Vm}}{\text{As} \cdot \text{m}^2} \;=\; 0{,}00873 \cdot 10^7\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\underline{E_P = 87\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}}$$

b) ges.: El. Potenzial in M
El. Potenzial in P

Lös.: Das Gesamtpotenzial φ_M im **Punkt M** ist die Summe der Einzelpotenziale:

$$\varphi_M = \varphi_{1-M} + \varphi_{2-M} + \varphi_{3-M}$$

$$\varphi_M = 2 \cdot \varphi_{1-M} + \varphi_{3-M}$$

$$\varphi_M = 2 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r} + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{r}$$

$$\varphi_M = \frac{2 \cdot Q_1 + Q_3}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \;=\; \frac{2 \cdot 75\,\text{nC} + (-150\,\text{nC})}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

$$\underline{\varphi_M = 0\,\text{V}}$$

Das Gesamtpotenzial φ_P im **Punkt P** ist die Summe der Einzelpotenziale:

$$\varphi_P = \varphi_{1-P} + \varphi_{2-P} + \varphi_{3-P}$$

$$\varphi_P = 2 \cdot \varphi_{1-P} + \varphi_{3-P}$$

$$\varphi_P = 2 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r\sqrt{2}} + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{2r}$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \cdot \left(\frac{2 \cdot Q_1}{\sqrt{2}} + \frac{Q_3}{2} \right) \;=\; \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2} \cdot Q_1}{2} + \frac{Q_3}{2} \right)$$

$$\varphi_P = \frac{2\sqrt{2} \cdot Q_1 + Q_3}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

$$\varphi_P = \frac{2\sqrt{2}\cdot 75\,\text{nC} + (-150\,\text{nC})}{8\,\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 4{,}0\cdot 10^{-2}\text{m}} = 0{,}0698\cdot 10^{5}\ \text{V}$$

$$\underline{\varphi_P = 70\,\text{kV}}$$

c) ges.: El. Spannung zwischen M und P

Lös.: Die el. Spannung ist die Differenz der Potenziale:

$$U_{M-P} = \varphi_M - \varphi_P = 0\text{V} - 70\,\text{kV}$$

$$\underline{U_{M-P} = -\,70\,\text{kV}}$$

$$\underline{U_{P-M} = +\,70\,\text{kV}}$$

d) ges.: Erforderliche Arbeit zum Verschieben eines Elektrons von P nach M

Lös.: Der Punkt P hat bezogen auf M ein positives Potenzial ($+\,70\,\text{kV}$).

$$W_{P-M} = e\cdot U_{M-P}$$

$$W_{P-M} = -\,70\,\text{keV}$$

$$W_{P-M} = -\,70\cdot 10^{3}\cdot 1{,}06\cdot 10^{-19}\,\text{J}$$

$$\underline{W_{P-M} = -\,7{,}4\cdot 10^{-15}\,\text{J}}$$

5. geg.: Punktladungen $Q_1 = +\,6{,}0\,\text{nC}$, $Q_2 = -\,3{,}0\,\text{nC}$
Abstand der Punktladungen $a = 60\,\text{cm}$

a) ges.: El. Potenzial in den Punkten A und B

Lös.: Elektrisches Potenzial im **Punkt A**:

$$\varphi_A = \varphi_{1-A} + \varphi_{2-A}$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r_{1-A}} + \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{r_{2-A}}$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q_1}{r_{1-A}} + \frac{Q_2}{r_{2-A}}\right) = \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{+\,6{,}0\,\text{nC}}{20\,\text{cm}} + \frac{-\,3{,}0\,\text{nC}}{40\,\text{cm}}\right)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\,\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{2\cdot 6{,}0\,\text{nC}}{40\,\text{cm}} - \frac{3{,}0\,\text{nC}}{40\,\text{cm}}\right)$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\,\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}\cdot\frac{9{,}0\cdot 10^{-9}\ \text{As}}{0{,}4\,\text{m}} = 0{,}2022\cdot 10^{3}\ \text{V}$$

$$\underline{\varphi_A = +\,202\,\text{V}}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

Elektrisches Potenzial im **Punkt B**:

$$\varphi_B = \varphi_{1-B} + \varphi_{2-B}$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r_{1-B}} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{r_{2-B}}$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q_1}{r_{1-B}} + \frac{Q_2}{r_{2-B}}\right) = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{+6{,}0\text{ nC}}{45\text{ cm}} + \frac{-3{,}0\text{ nC}}{15\text{ cm}}\right)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{6{,}0\text{ nC}}{45\text{ cm}} - \frac{3\cdot 3{,}0\text{ nC}}{45\text{ cm}}\right)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}\cdot\frac{-3{,}0\cdot 10^{-9}\text{ As}}{0{,}45\text{ m}} = -0{,}0599\cdot 10^{3}\text{ V}$$

$$\underline{\underline{\varphi_B = -60\text{ V}}}$$

b) geg.: Probeladung $q = 3{,}0\cdot 10^{-15}\,\text{C}$

ges.: Erforderliche Arbeit, um die Probeladung q von A nach B zu transportieren.

Lös.: Die Potenzialdifferenz zwischen A und B beträgt:

$$\varphi_{A-B} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\varphi_{A-B} = +202\text{ V} - (-60\text{ V})$$

$$\underline{\varphi_{A-B} = +262\text{ V}}$$

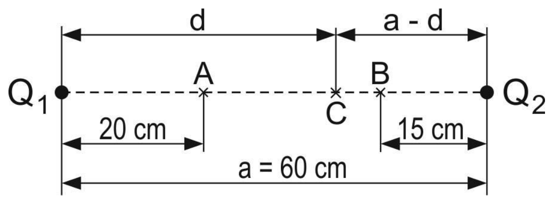
Erforderliche Arbeit, die vom el. Feld verrichtet wird:

$$W_{A-B} = \varphi_{A-B}\cdot q$$

$$W_{A-B} = 262\text{ V}\cdot 3{,}0\cdot 10^{-15}\,\text{C} = 786\cdot 10^{-15}\,\text{VAs}$$

$$\underline{\underline{W_{A-B} = 786\cdot 10^{-15}\,\text{J}}}$$

c) ges.: Abstand d eines Punktes C (mit dem Potenzial 0 V) zu Q_1



Lös.: Elektrisches Potenzial im Punkt C:

$$\varphi_C = \varphi_{1-C} + \varphi_{2-C} \quad \text{mit} \quad \varphi_C = 0$$

$$0 = \varphi_{1-C} + \varphi_{2-C}$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{d} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{a-d} \qquad \Big| : \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{a-d} \qquad \Big| -\frac{Q_1}{d}$$

$$-\frac{Q_1}{d} = \frac{Q_2}{a-d} \qquad \Big|\ \text{über Kreuz multiplizieren}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

$$-(a-d)\cdot Q_1 = d\cdot Q_2$$

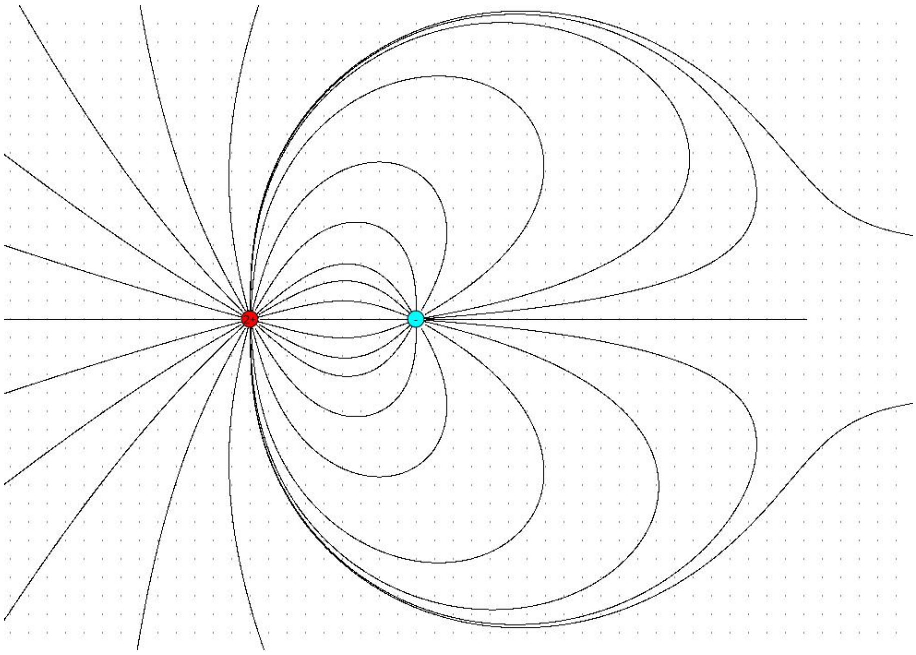
$$-a\cdot Q_1 + d\cdot Q_1 = d\cdot Q_2$$

$$d(Q_1 - Q_2) = a\cdot Q_1$$

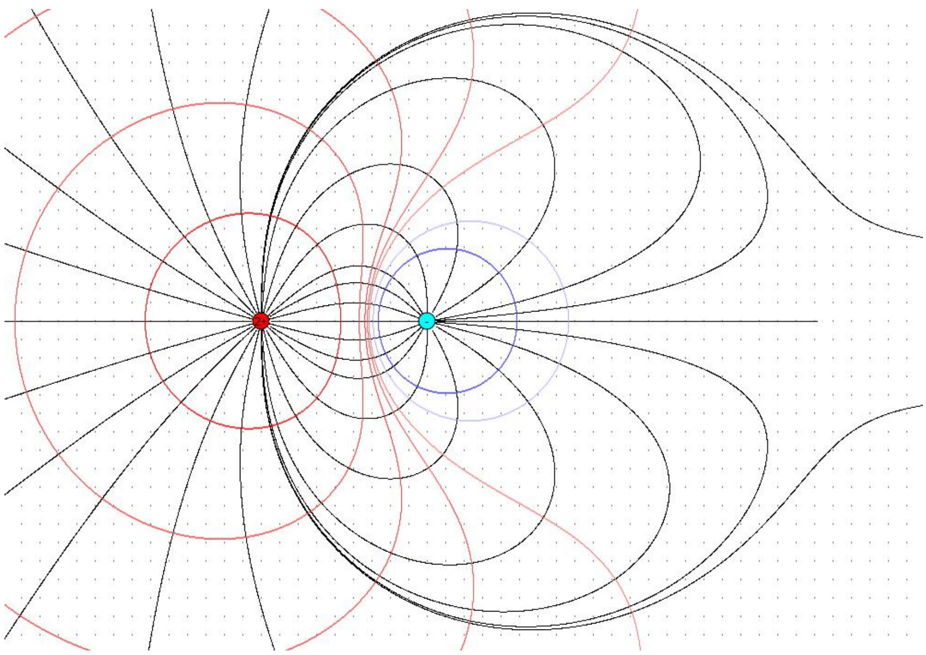
$$d = a\cdot\frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = 60\text{ cm}\cdot\frac{6{,}0\text{ nC}}{6{,}0\text{ nC}-(-3{,}0\text{ nC})} = 60\text{ cm}\cdot\frac{6{,}0\text{ nC}}{9{,}0\text{ nC}}$$

$$\underline{\underline{d = 40\text{ cm}}}$$

d) ges.: Feldlinienbild



Feldlinienbild mit Äquipotentiallinien



- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

6. geg.: Kugel K1 mit $r_1 = 2{,}0\,\text{cm}$, $U_1 = +250\,\text{V}$

Kugel K2 mit $r_2 = 3{,}0\,\text{cm}$, $U_2 = -250\,\text{V}$

Abstände $a = 80\,\text{cm}$, $a = 50\,\text{cm}$

a) ges.: Größe der Ladungen Q_1 und Q_2

Lös.: Das Potenzial auf der Kugeloberfläche entspricht der Aufladespannung U.

<u>Kugel K1</u>:

$$\varphi_{K1} = U_1 = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r_1} \quad \Big|\ \text{auflösen nach } Q_1$$

$$Q_1 = 4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r_1\cdot U_1$$

$$Q_1 = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 2{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot 250\,\text{V}$$

$$Q_1 = 55631\cdot 10^{-14}\,\text{As}$$

$$\underline{\underline{Q_1 = 5{,}56\cdot 10^{-10}\,\text{As}}}$$

<u>Kugel K2</u>:

$$Q_2 = 4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r_2\cdot U_2$$

$$Q_2 = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 3{,}0\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\left(-250\,\text{V}\right)$$

$$Q_2 = -83447\cdot 10^{-14}\,\text{As}$$

$$\underline{\underline{Q_2 = -8{,}34\cdot 10^{-10}\,\text{As}}}$$

b) ges.: El. Potenzial im Punkt P

Lös.: Das Gesamtpotenzial ist die Summe der Einzelpotenziale:

$$\varphi_P = \varphi_{1-P} + \varphi_{2-P}$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{s} + \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{a-s}$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{Q_1}{s} + \frac{Q_2}{a-s}\right)$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}\cdot\left(\frac{5{,}56\cdot 10^{-10}\,\text{As}}{0{,}5\,\text{m}} + \frac{-8{,}34\cdot 10^{-10}\,\text{As}}{0{,}3\,\text{m}}\right)$$

$$\varphi_P = -0{,}1499\cdot 10^{2}\,\text{V}$$

$$\underline{\underline{\varphi_P = -15\,\text{V}}}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

c) geg.: Probeladung $q = +2{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{As}$

ges.: Verrichtete Verschiebearbeit $q \rightarrow P$

Lös.: Arbeit zum Verschieben der Probeladung:

$$W = \varphi_P \cdot q$$

$$W = -15\,\text{V} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{As}$$

$$\underline{\underline{W = -30 \cdot 10^{-15}\,\text{J}}}$$

d) ges.: Verschiebearbeit $q \rightarrow K1$

Lös.: Arbeit zum Verschieben der Probeladung:

$$W = (\varphi_{K1} - \varphi_P) \cdot q$$

$$W = (250\,\text{V} - (-15\,\text{V})) \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{As}$$

$$W = 265\,\text{V} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{As}$$

$$\underline{\underline{W = 530 \cdot 10^{-15}\,\text{J}}}$$

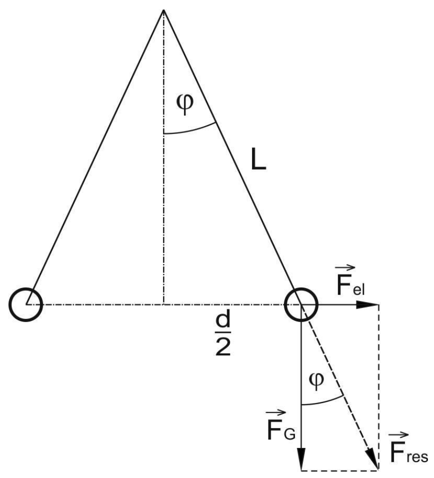
7. geg.: Kugel: Masse $m = 2\,\text{g} = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$

Ladung $Q = 20\,\text{nC} = 20 \cdot 10^{-9}\,\text{C}$

Abstand $d = 5{,}0\,\text{cm} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$

ges.: Fadenlänge L

Lös.: Der Kugelabstand d ergibt sich aus dem Gleichgewicht der abstoßenden Coulomb-Kraft F_{el} zwischen den Kugeln, der Gewichtskraft F_G der Kugel und der Fadenlänge L.



In der Skizze rechts gilt für das

Auslenkungs-Dreieck: $\sin\varphi = \dfrac{d}{2 \cdot L}$

Kräfte-Dreieck: $\tan\varphi = \dfrac{F_{el}}{F_G}$

Für kleine Winkel (ist hier der Fall), gilt $\tan\varphi = \sin\varphi$ und damit

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{d}{2 \cdot L} \rightarrow L = \frac{d}{2} \cdot \frac{F_G}{F_{el}} \quad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$L = \frac{d}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{F_{el}} \quad \text{mit } F_{el} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} \quad \middle|\, Q_1 = Q_2 = Q$$

$$L = \frac{d}{2} \cdot \frac{m \cdot g \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d^2}{Q^2}$$

$$\boxed{L = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m \cdot g \cdot d^3}{Q^2}}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

$$L = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm} \cdot 2 \cdot 10^{-3}kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(5{,}0 \cdot 10^{-2}m\right)^3}{\left(20 \cdot 10^{-9}C\right)^2}$$

$$L = \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 2 \cdot 9{,}81 \cdot 125}{400} \cdot 10^{-12-3-6+18}\,\frac{As \cdot kg \cdot m \cdot m^3}{Vm \cdot s^2 \cdot C^2}$$

$$L = 341{,}09 \cdot 10^{-3}m$$

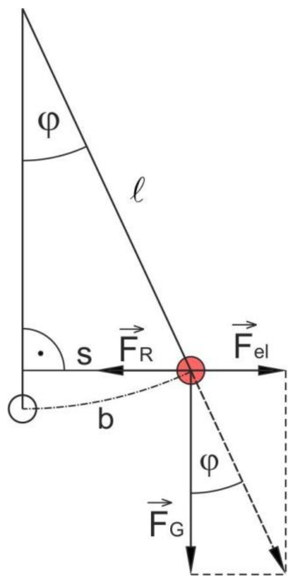
$$\underline{\underline{L = 0{,}34\ m}}$$

Berechnung von φ: $\sin\varphi = \frac{d}{2 \cdot L} = \frac{0{,}05\,m}{2 \cdot 0{,}341\,m} = 0{,}0733... \rightarrow \underline{\varphi \approx 4{,}20°}$

Der Winkel ist kleiner als 10°, somit darf die Näherung $\tan\varphi = \sin\varphi$ verwendet werden.

Für kleine Auslenkwinkel $(\varphi < 10°)$ können die folgenden Näherungen zur Berechnung gemacht werden:

- Die Länge des Kreisbogens b ist etwa gleich der Auslenkstrecke s $(s = b)$,
- Die Rückstellkraft F_R, die tangential zum Kreisbogen b angreift, wird horizontal in Richtung der Strecke s angenommen,
- der Sinus des Auslenkwinkels φ ist nahezu gleich dem Tangens von φ.



Aufgrund obiger Vereinfachungen gilt dann:

$\sin\varphi = \frac{s}{\ell}$ und $\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G}$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

8. geg.: Kugel: Masse $m = 1{,}0\ g = 1{,}0 \cdot 10^{-3} kg$

Ladung $Q = 4 \cdot 10^{-8} C$

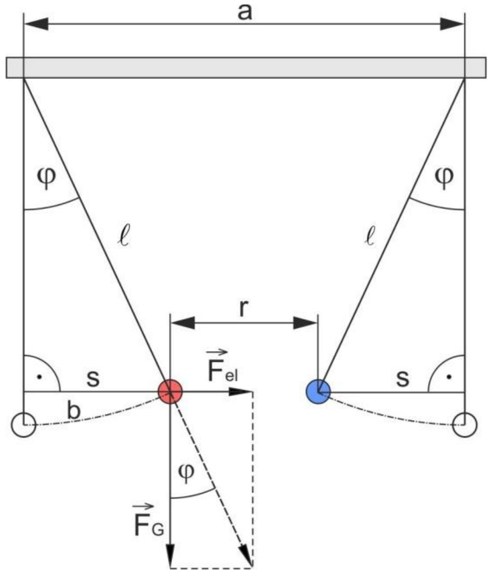
Fadenlänge $\ell = 1{,}2\ m$

Auslenkung $s = \frac{a}{4}$

ges.: Befestigungsabstand a

Lös.: Der Kugelabstand r ergibt sich aus:

In der Skizze ist der Auslenkwinkel stark vergrößert dargestellt.



$$r = a - 2 \cdot s = a - 2 \cdot \frac{a}{4}$$

$$\underline{r = \frac{a}{2}}$$

In der Skizze rechts gilt für das

Auslenkungs-Dreieck: $\sin\varphi = \frac{s}{\ell}$

Kräfte-Dreieck: $\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G}$

Für kleine Winkel (ist hier der Fall), gilt $\tan\varphi = \sin\varphi$ und damit

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{s}{\ell}$$

$$s = \frac{F_{el}}{F_G} \cdot \ell \qquad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$s = \frac{F_{el} \cdot \ell}{m \cdot g} \qquad \text{mit } F_{el} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} \qquad \left| Q_1 = Q_2 = Q \right.$$

$$s = \frac{Q^2 \cdot \ell}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot m \cdot g} \qquad \text{mit } s = \frac{a}{4} \text{ und } r = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{Q^2 \cdot \ell}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot m \cdot g}$$

$$a = \frac{16 \cdot Q^2 \cdot \ell}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot m \cdot g} \qquad \left| \cdot a^2 \right.$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot Q^2 \cdot \ell}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m \cdot g}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \left(4 \cdot 10^{-8} C\right)^2 \cdot 1{,}2\ m}{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3} kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 1{,}2}{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 9{,}81} \cdot 10^{-16+12+3} \frac{C^2 \cdot m \cdot V \cdot m \cdot s^2}{A \cdot s \cdot kg \cdot m}} = \sqrt[3]{0{,}028145\ m^3}$$

$$\underline{\underline{a = 0{,}30\ m}}$$

Einheiten-Umrechnungen

$$\frac{C^2 \cdot m \cdot V \cdot m \cdot s^2}{A \cdot s \cdot kg \cdot m} = \frac{A^2 \cdot s^2 \cdot m \cdot V \cdot m \cdot s^2}{A \cdot s \cdot kg \cdot m} =$$

$$\frac{A \cdot V \cdot s^3 \cdot m}{kg} = \frac{s^2 \cdot Nm \cdot m}{kg} = \frac{s^2 \cdot kg \cdot m \cdot m \cdot m}{kg \cdot s^2} = m^3$$

Kontrolle - Berechnung von φ:

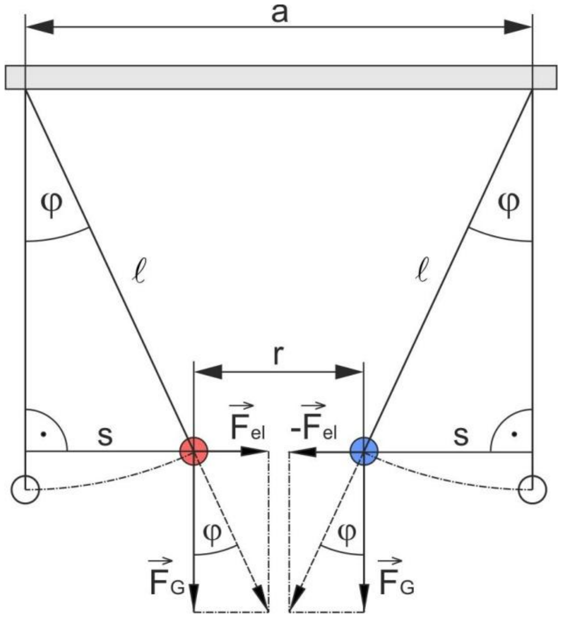
$$\sin\varphi = \frac{s}{\ell} = \frac{0{,}075\ m}{1{,}2\ m} = 0{,}0625$$

$$\underline{\varphi \approx 3{,}6°}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

9. geg.: Kugelmasse $m = 1{,}0\ \text{g} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$
Fadenlänge $\ell = 1{,}0\ \text{m}$
Abstand der Befestigung $a = 20\,\text{cm}$
Abstand der Kugeln $r = 10\,\text{cm}$
Ladung: links $+4q$, rechts $-1q$

In der Skizze ist der Auslenkwinkel stark vergrößert dargestellt.



a) ges.: Begründung gleiche Auslenkwinkel
Kräfte einzeichnen
Auslenkwinkel φ berechnen

Lös.: Weil beide Kugeln gleiche Masse haben, und weil die Anziehungskraft auf beide Kugeln gleichermaßen wirkt (actio = reactio), sind die Auslenkwinkel gleich.

Berechnung von φ (siehe Skizze):

$$\sin\varphi = \frac{s}{\ell} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a-r}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{a-r}{2\cdot\ell} = \frac{20\ \text{cm} - 10\ \text{cm}}{2\cdot 100\ \text{cm}} = 0{,}05$$

$$\underline{\underline{\varphi \approx 2{,}9^\circ}}$$

Auch bei ungleicher Ladungsmenge wirken nach dem Wechselwirkungsprinzip auf beide Kugeln Kräfte von gleichem Betrag.

b) ges.: Zahlenwert der Ladung q

Lös.: Im Kräfte-Dreieck gilt:

$$\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G}$$

$$F_{el} = F_G \cdot \tan\varphi \quad \Big| \; F_G = m \cdot g$$

$$\underline{F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\varphi \qquad \text{Gl.1}}$$

Coulomb-Kraft zwischen den Ladungen (Kugeln):

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad \Big| \; Q_1 = 4q,\ Q_2 = q$$

$$\underline{F_{el} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0} \cdot \frac{4q^2}{r^2} \qquad \text{Gl.2}}$$

Gl. 1 = Gl. 2

$$\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0} \cdot \frac{4q^2}{r^2} = m \cdot g \cdot \tan\varphi$$

$$q = \sqrt{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot m \cdot g \cdot \tan\varphi}$$

$$q = \sqrt{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot (0{,}1\,\text{m})^2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 2{,}9^\circ}$$

$$q = \sqrt{0{,}13823 \cdot 10^{-15}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

$$q = \sqrt{1{,}3823 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} \cdot \mathrm{Nm}} = 1{,}176 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

$$\underline{q \approx 1{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}$$

c) ges.: Welche Feldstärke erzeugt jeweils die eine Kugel am Ort der anderen?

Lös.: Zwei elektrisch geladene Kugeln im Abstand r mit den Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugen jeweils ein elektrisches Feld der Stärke:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \quad \text{mit } Q_1 = q$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{1{,}176 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{(0{,}1\,\mathrm{m})^2} = 1{,}057 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\underline{E_1 \approx 1{,}1 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \quad \text{mit } Q_1 = 4q$$

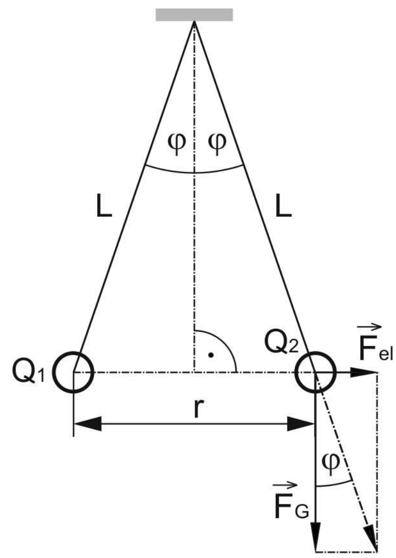
$$E_2 = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{4 \cdot 1{,}176 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{(0{,}1\,\mathrm{m})^2} = 4{,}228 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\underline{E_2 \approx 4{,}2 \cdot 10^{4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$$

10. geg.: Kugelmasse $m = 1{,}5\,\mathrm{g} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
Fadenlänge $L = 2{,}0\,\mathrm{m}$
Auslenkwinkel $\varphi = 6{,}0°$
Ladung $Q_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}\ (\mathrm{As})$

ges.: Betrag der Ladung Q_1

Lös.: Obwohl die Ladungen unterschiedlich sind, hängen die Kugeln symmetrisch zur (gedachten) Mittelachse, weil die Kugeln gleiche Massen haben und die elektrostatischen Kräfte sich gegenseitig abstoßen (actio = reactio).



Auch bei ungleicher Ladungsmenge wirken nach dem Wechselwirkungsprinzip auf beide Kugeln Kräfte von gleichem Betrag.

Aus obiger Skizze ergibt sich:

$$\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G} \quad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$\underline{F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\varphi}$$

und

$$\sin\varphi = \frac{\frac{r}{2}}{L} = \frac{r}{2 \cdot L} \quad \rightarrow \quad \underline{r = 2 \cdot L \cdot \sin\varphi}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

Für die elektrostatische Kraft zwischen den Kugeln gilt das Coulomb-Gesetz:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$; durch Einsetzen obiger Formeln erhält man:

$$m \cdot g \cdot \tan\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{(2 \cdot L \cdot \sin\varphi)^2}$$

$$Q_1 = \frac{m \cdot g \cdot \tan\varphi \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot 4 \cdot L^2 \cdot \sin^2\varphi}{Q_2}$$

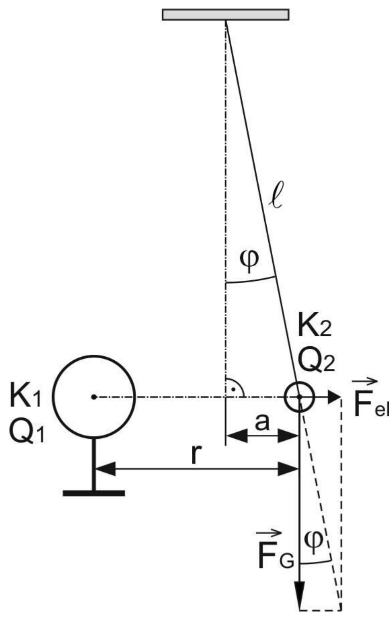
$$Q_1 = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 6° \cdot 16 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4{,}0\,\text{m}^2 \cdot \sin^2 6°}{2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{As}}$$

$$Q_1 = \frac{1{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 64 \cdot 8{,}854 \cdot \pi \cdot \tan 6° \cdot \sin^2 6°}{2{,}0} \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{As} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{Vm} \cdot \text{As}}$$

$$Q_1 = 15{,}04 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$$

$$\underline{Q_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{C}}$$

11. geg.: Kugelmasse $m = 1{,}2\,\text{g} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$
Fadenlänge $\ell = 2{,}0\,\text{m}$
Auslenkung $a = 3{,}5\,\text{cm}$
Kugelabstand $r = 8{,}0\,\text{cm}$
Ladung $Q_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}\ (\text{As})$



a) ges.: Elektrische Feldstärke E im Abstand r

Lös.: Zunächst wird der Auslenkwinkel φ berechnet:

$$\sin\varphi = \frac{a}{\ell} = \frac{3{,}5\,\text{cm}}{200\,\text{cm}} \quad \rightarrow \underline{\varphi = 1{,}0°}$$

Weil $a \ll \ell$ bzw. der Auslenkwinkel sehr klein ist, wirkt F_{el} horizontal und es gilt:

$$\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G} \quad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$\underline{F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\varphi}$$

Die elektrische Feldstärke E ist dann:

$$E = \frac{F_{el}}{Q_2} \quad \text{mit } F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\varphi$$

$$E = \frac{m \cdot g \cdot \tan\varphi}{Q_2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \tan 1{,}0°}{2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}} = 0{,}103 \cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{As}}$$

$$\underline{E = 1{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

b) ges.: Betrag der Ladung Q_1

Lös.: Die Feldstärke im Coulombfeld der Ladung Q_1 beträgt:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

$$Q_1 = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot E$$

$$Q_1 = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot (0{,}08\,\mathrm{m})^2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{Q_1 = 0{,}71 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}}$$

c) geg.: Radius der Konduktorkugel $r_{K1} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$

ges.: Coulombpotenzial φ_{K1} auf der Kugeloberfläche von K_1

Lös.: Für das Coulombpotenzial gilt:

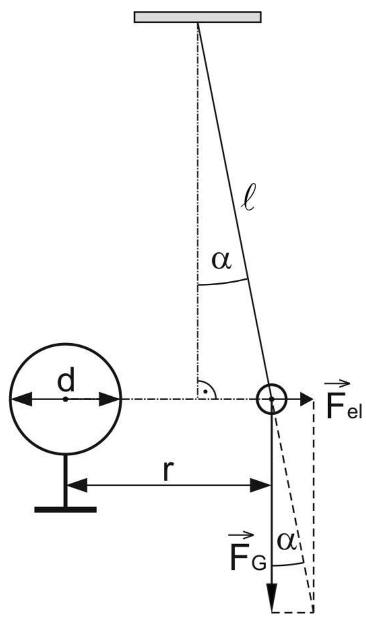
$$\varphi_{K1} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_{K1}}$$

$$\varphi_{K1} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{0{,}71 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{As}}{0{,}03\,\mathrm{m}} = 0{,}213 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{K1} = 21\,\mathrm{kV}}}$$

12. geg.: Masse kleine Kugel $m = 1{,}4\,\mathrm{g} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
Durchmesser große Kugel $d = 15\,\mathrm{cm}$
Fadenlänge $\ell = 1{,}5\,\mathrm{m}$
Auslenkungswinkel $\alpha = 2{,}5°$
Kugelabstand $r = 22\,\mathrm{cm}$
Aufladespannung $U = 8\,\mathrm{kV}$

ges.: Größe der Ladung q (kleine Kugel)



Lös.: Die Ladung Q auf der Oberfläche der großen Kugel erhält man mit folgender Überlegung:
Das Coulomb-Potenzial φ auf der Kugeloberfläche entspricht der Aufladung durch die Spannung U:

$$\varphi_r = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

$$Q = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r \cdot \varphi_r \qquad \text{mit } r = d/2 \text{ und } \varphi_r = U$$

$$Q = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{2} \cdot U$$

$$Q = 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot 0{,}075\,\mathrm{m} \cdot 8{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{V} = 66{,}76 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}$$

$$\underline{Q = 6{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}$$

Aus dem Kraft-Diagramm erhalten wir die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{F_{el}}{F_G} \quad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$\underline{F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\alpha}$$

Das Coulomb-Gesetz liefert die elektrostatische Kraft zwischen den beiden Kugeln. Durch Umstellen der Formel erhalten wir q:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \qquad \Big| \text{ umstellen nach q}$$

$$q = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot F_{el}}{Q} \qquad \Big| \; F_{el} = m \cdot g \cdot \tan\alpha$$

$$q = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2 \cdot m \cdot g \cdot \tan\alpha}{Q}$$

$$q = \frac{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm} \cdot (0{,}22\,m)^2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \tan 2{,}5°}{6{,}7 \cdot 10^{-8}\ As}$$

$$q = 0{,}482 \cdot 10^{-7}\,As$$

$$\underline{\underline{q = 4{,}8 \cdot 10^{-8}\,C}}$$

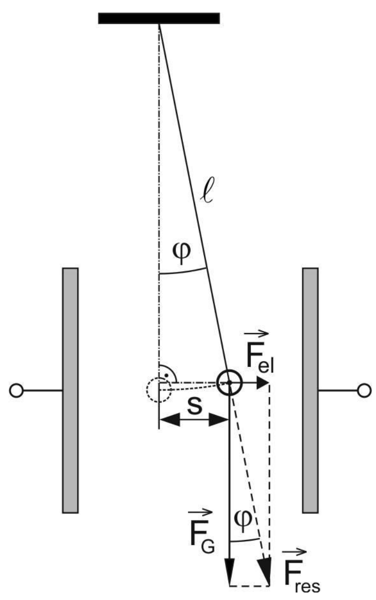
13. geg.: Plattenabstand $d = 10\,cm$

Fadenlänge $\ell = 1{,}0\,m$

Auslenkung $s = 2\,cm$

Kugelmasse $m = 0{,}5\,g = 5 \cdot 10^{-4}\,kg$

Ladung der Kugel $Q = 5 \cdot 10^{-9}\,C\ (As)$



a) ges.: Skizze mit den beteiligten Kräften ergänzen

Lös.: siehe Skizze rechts

b) ges.: Kondensatorspannung U

Lös.: Auf die Kugel wirkt im elektrischen Feld des Kondensators die seitliche Kraft F_{el}. Gleichzeitig wird die Kugel durch die Gewichtskraft F_G nach unten gezogen. Die resultierende Kraft F_{res} zeigt in Richtung des Fadens.

Weil $s \ll \ell$ bzw. der Auslenkwinkel sehr klein ist, gelten näherungsweise die folgenden Zusammenhänge:

Auslenkungs-Dreieck: $\sin\varphi = \frac{s}{\ell} \quad \left(= \frac{0{,}02\,m}{1{,}0\,m} \rightarrow \varphi \approx 1{,}15° \right)$

Kräfte-Dreieck: $\tan\varphi = \frac{F_{el}}{F_G}$

$$\tan\varphi = \sin\varphi$$

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{s}{\ell} \quad \rightarrow \quad \underline{F_{el} = \frac{s}{\ell} \cdot F_G \qquad (Gl.1)}$$

- Lösungen - Coulomb, el. Feld, Potenzial

Die elektrische Feldstärke im Kondensator erhält man aus:

$E = \frac{U}{d}$ sowie $E = \frac{F_{el}}{Q}$; daraus folgt

$$\frac{U}{d} = \frac{F_{el}}{Q}$$

$$\underline{U = \frac{d}{Q} \cdot F_{el} \quad \text{(Gl.2)}}$$

Gl. 1 in Gl. 2 einsetzen:

$$U = \frac{d}{Q} \cdot \frac{s}{\ell} \cdot F_G \quad \text{mit } F_G = m \cdot g$$

$$U = \frac{d \cdot s \cdot m \cdot g}{\ell \cdot Q}$$

$$U = \frac{0{,}10\,\text{m} \cdot 0{,}02\,\text{m} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1{,}0\,\text{m} \cdot 5 \cdot 10^{-9}\,\text{As}} = 0{,}0196 \cdot 10^5\,\frac{\text{Nm}}{\text{As}} = 1962\,\text{V}$$

$$\underline{\underline{U \approx 2\,\text{kV}}}$$

c) ges.: Veränderung der Auslenkung bei Vergrößerung des Plattenabstands

Lös.: Nachdem die Spannungsquelle entfernt wurde kann sich die Ladung der beiden Kondensatorplatten nicht mehr ändern. Allerdings verringert sich die Kapazität C des Kondensators, wenn der Plattenabstand vergrößert wird, denn es gilt:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \qquad \underline{|\; A = \text{Plattenfläche}; \; d = \text{Plattenabstand}}$$

Wird nun der Abstand d um 50% größer $\rightarrow C' = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{1{,}5 \cdot d}$,

dann verringert sich C um 2/3, also $C' = \frac{2}{3} \cdot C$.

Dementsprechend vergrößert sich die Spannung U zwischen den Platten:

$$U' = \frac{q_{Kond}}{C'} = \frac{q_{Kond}}{\frac{2}{3}C} = 1{,}5 \cdot U$$

Somit bleibt die elektrische Feldstärke E gleich, denn:

$$E' = \frac{U'}{d'} = \frac{1{,}5 \cdot U}{1{,}5 \cdot d} = E$$

Verändert sich die elektrische Feldstärke nicht, so bleibt auch die elektrische Kraft und damit die Auslenkung konstant.

