Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 1

- Lösungen -

<u>Hinweis</u>:

Die jeweilige Längeneinheit (z.B. mm) wird beim Rechnen nicht angegeben und erst dem Ergebnis hinzugefügt.

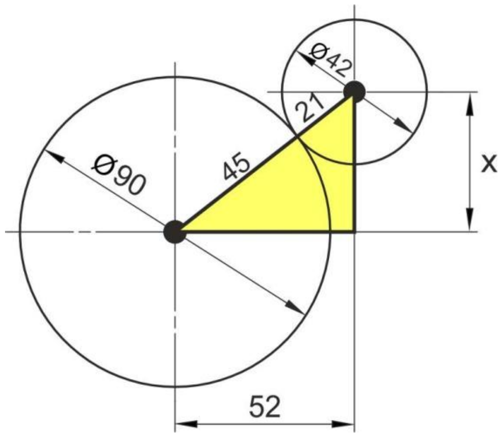
Die Zeichnungen sind **NICHT** maßstäblich.

1. Pythagoras:

$$(45+21)^2 = 52^2 + x^2$$

$$x = \sqrt{66^2 - 52^2}$$

$$\underline{\underline{x = 40{,}64 \text{ mm}}}$$



---

2. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und s definiert:

$$a = \frac{55-46}{2} = \underline{4{,}5 \text{ mm}}$$

$$b = 70 - 16 = \underline{54 \text{ mm}}$$

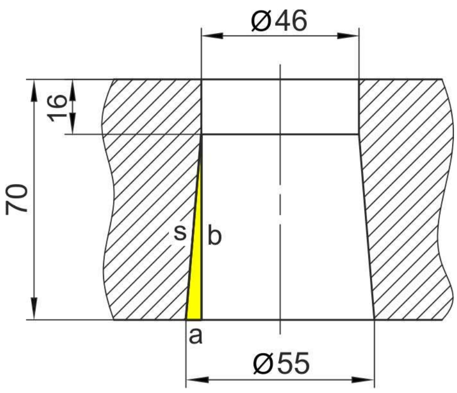
Pythagoras:

$$s^2 = a^2 + b^2$$

$$s^2 = 4{,}5^2 + 54^2$$

$$s = \sqrt{2936{,}25}$$

$$\underline{\underline{s = 54{,}19 \text{ mm}}}$$



---

3. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und c definiert:

$$a = \frac{d1}{2} = \underline{2{,}5 \text{ mm}}; \quad c = \frac{d}{2} = \underline{6 \text{ mm}}$$

Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

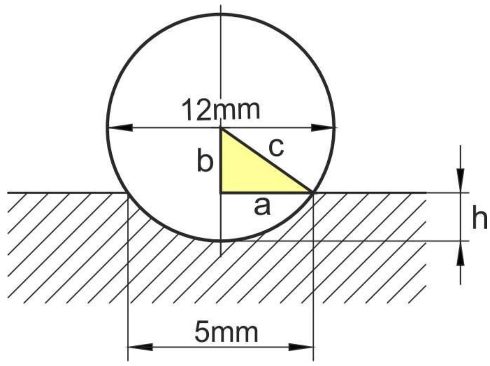
$$b^2 = 6^2 - 2{,}5^2$$

$$b = \sqrt{36 - 6{,}25} = \sqrt{29{,}75}$$

$$\underline{b = 5{,}45 \text{ mm}}$$

$$h = 6 - b = 6 - 5{,}45$$

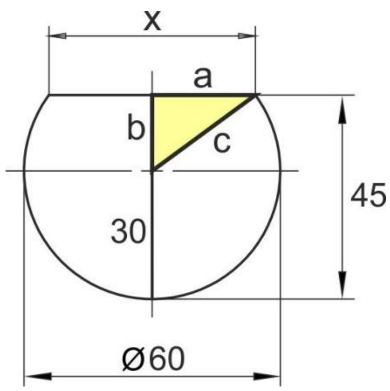
$$\underline{\underline{h = 0{,}55 \text{ mm}}}$$



- Lösungen -

4. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und c definiert:

$b = 45 - 30 = \underline{15\ \text{mm}}$; $c = \frac{d}{2} = \frac{60}{2} = \underline{30\ \text{mm}}$



Pythagoras:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 30^2 - 15^2$

$a = \sqrt{900 - 225} = \sqrt{675}$

$\underline{a = 25{,}98\ \text{mm}}$

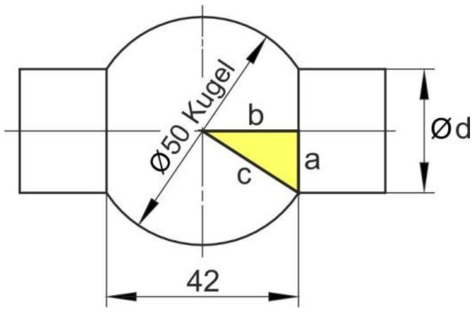
$x = 2a$

$\underline{\underline{x = 51{,}96\ \text{mm}}}$

---

5. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und c definiert:

$a = \frac{d}{2}$; $b = \frac{42\ \text{mm}}{2} = \underline{21\ \text{mm}}$; $c = \frac{50\ \text{mm}}{2} = \underline{25\ \text{mm}}$



Pythagoras:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 25^2 - 21^2$

$a = \sqrt{625 - 441} = \sqrt{184}$

$\underline{a = 13{,}56\ \text{mm}}$

$d = 2a$

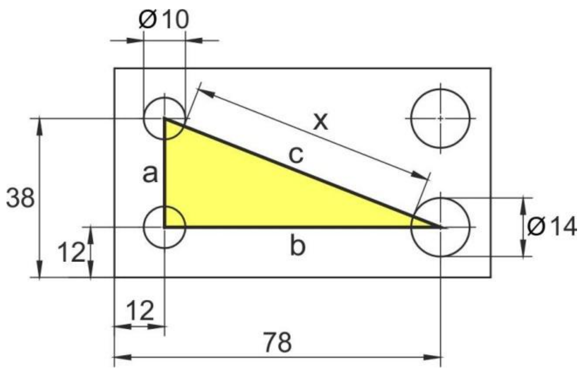
$\underline{\underline{d = 27{,}13\ \text{mm}}}$

---

6. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und c definiert:

$a = 38 - 12 = \underline{26\ \text{mm}}$; $b = 78 - 12 = \underline{66\ \text{mm}}$

Pythagoras:



$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 26^2 + 66^2$

$c = \sqrt{676 - 4356} = \sqrt{5032}$

$\underline{c = 70{,}94\ \text{mm}}$

Kontrollmaß x:

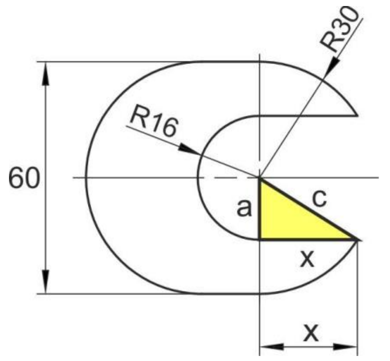
$x = 70{,}94 - \frac{10}{2} - \frac{14}{2}$

$\underline{\underline{x = 58{,}94\ \text{mm}}}$

- Lösungen -

7. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, x und c definiert:

$a = R16 = \underline{16\text{ mm}}$; $c = R30 = \underline{30\text{ mm}}$



Pythagoras:

$c^2 = a^2 + x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = c^2 - a^2$

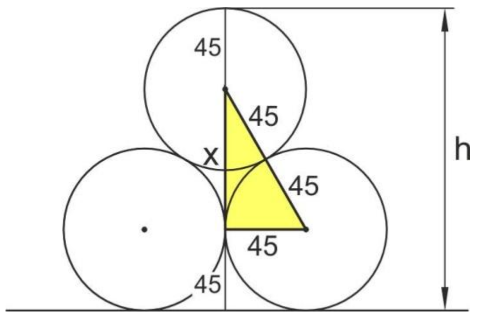
$x^2 = 30^2 - 16^2$

$x = \sqrt{900 - 256} = \sqrt{644}$

$\underline{\underline{x = 25{,}38\text{ mm}}}$

---

8. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen x, 45 und 90 definiert:



Pythagoras:

$(45 + 45)^2 = 45^2 + x^2$

$x^2 = 90^2 - 45^2$

$x = \sqrt{8100 - 2025} = \sqrt{6075}$

$\underline{x = 77{,}94\text{ mm}}$

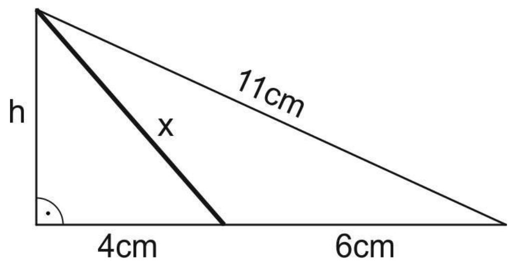
Gesamthöhe h:

$h = x + 2r = 77{,}94 + 2 \cdot 45$

$\underline{\underline{h = 167{,}94\text{ mm}}}$

---

9. Berechnung von h – Pythagoras:



$11^2 = (4 + 6)^2 + h^2$

$h^2 = 11^2 - 10^2$

$h = \sqrt{121 - 100} = \sqrt{21}$

$\underline{h = 4{,}58\text{ cm}}$

Berechnung von x – Pythagoras:

$x^2 = 4^2 + h^2$

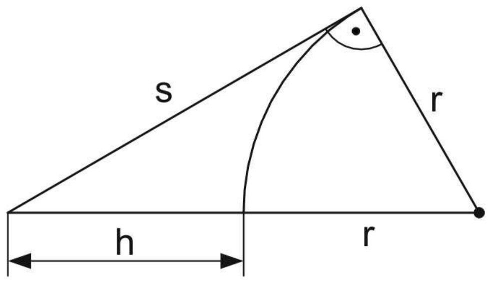
$x^2 = 4^2 + 21$

$x = \sqrt{16 + 21} = \sqrt{37}$

$\underline{\underline{x = 6{,}08\text{ cm}}}$

- Lösungen -

10. Berechnung von s (allgemein) – Pythagoras:



$$(h+r)^2 = r^2 + s^2$$

$$s = \sqrt{(h+r)^2 - r^2}$$

$$s = \sqrt{h^2 + 2hr + r^2 - r^2}$$

$$\underline{s = \sqrt{h^2 + 2hr}}$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte:

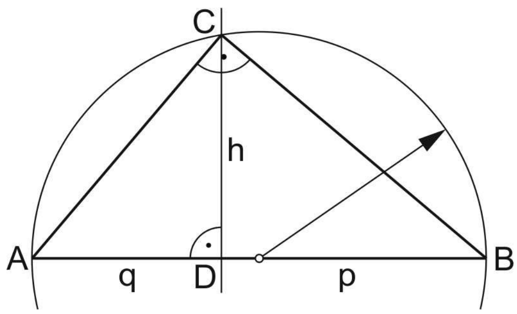
$$s = \sqrt{12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 380}$$

$$s = \sqrt{9264}$$

$$\underline{\underline{s = 96{,}25\ \text{cm}}}$$

---

11. Konstruktionsbeschreibung:



- $p + q = \overline{AB} = 6\ \text{cm}$ antragen.
- Thaleskreis um $\overline{AB}$.
- Senkrechte durch den Berührpunkt D schneidet den Thaleskreis in C.
- A mit C und B mit C verbinden ergibt ΔABC,

Berechnung der Dreieckshöhe h
Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h = \sqrt{3{,}5 \cdot 2{,}5} = \sqrt{8{,}75}$$

$$\underline{h = 2{,}96\ \text{cm}}$$

Dreiecksfläche:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$$

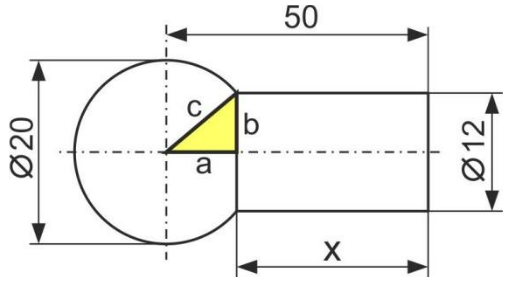
$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{cm} \cdot 2{,}96\ \text{cm}$$

$$\underline{\underline{A_\Delta = 8{,}88\ \text{cm}^2}}$$

---

12. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und c definiert:

$$b = \frac{12}{2} = \underline{6\ \text{mm}}; \quad c = \frac{\varnothing 20}{2} = \underline{10\ \text{mm}}$$



Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 10^2 - 6^2$$

$$a = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64}$$

$$\underline{a = 8\ \text{mm}}$$

Länge x:

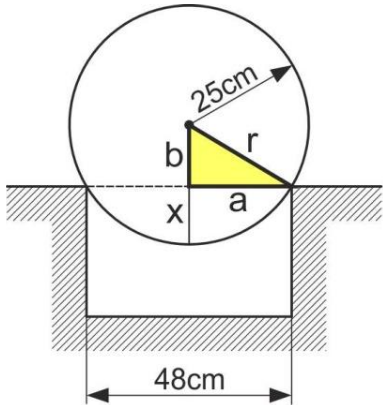
$$x = 50 - a$$

$$\underline{\underline{x = 42\ \text{mm}}}$$

- Lösungen -

13. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck mit den Maßen a, b und r definiert:

$a = \frac{d}{2} = \underline{24\text{ cm}}$; $\quad r = \underline{25\text{ cm}}$



Pythagoras:

$r^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = r^2 - a^2$

$b^2 = 25^2 - 24^2$

$b = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49}$

$\underline{b = 7\text{ cm}}$

Länge x:

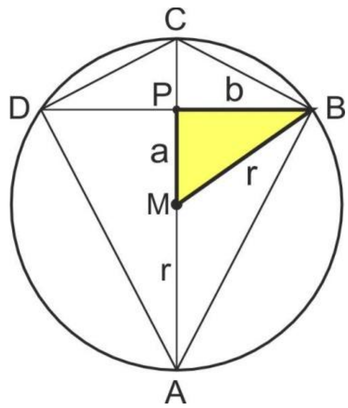
$x = r - b = 25 - 7$

$\underline{\underline{x = 18\text{ cm}}}$

---

14. Für die Berechnung ist das rechtwinklige Dreieck MBP mit den Maßen a, b und r definiert:

$b = \frac{\overline{DB}}{2} = \frac{1{,}5\,r}{2} = 0{,}75\,r$



Pythagoras:

$r^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; a^2 = r^2 - b^2$

$a^2 = r^2 - (0{,}75\,r)^2$

$a^2 = r^2 - 0{,}5625 \cdot r^2$

$a^2 = 0{,}4375 \cdot r^2 \qquad \Big|\sqrt{\;}$

$\underline{\underline{a = 0{,}66\,r}}$

---

15. a) Dreieckseite $\overline{BC}$ - Flächenformel für das ΔABC:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_a$

$\overline{BC} = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABC}}{h_a} = \frac{2 \cdot 38\text{ cm}^2}{8\text{ cm}}$

$\underline{\overline{BC} = 9{,}5\text{ cm}}$

Teilstrecke $\overline{HM}$ - Pythagoras im ΔAMH:

$\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HM}^2$

$\overline{HM} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AH}^2}$

$\overline{HM} = \sqrt{8{,}5^2 - 8^2} = \sqrt{8{,}25}$

$\underline{\overline{HM} = 2{,}87\text{ cm}}$

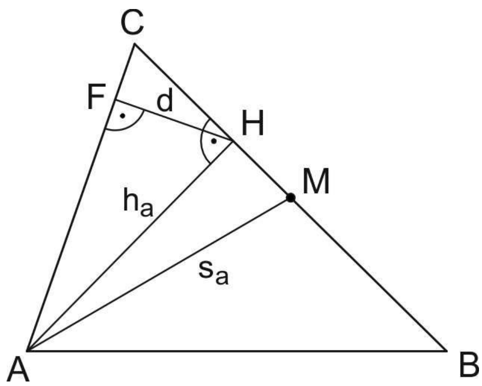
Teilstrecke $\overline{CH}$:

$\overline{CH} = \overline{CM} - \overline{HM}$

$\overline{CH} = \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{HM} = 4{,}75 - 2{,}87$

$\underline{\overline{CH} = 1{,}88\text{ cm}}$

- Lösungen -



Dreieckseite $\overline{AC}$ - Pythagoras im ΔAHC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 1{,}88^2} = \sqrt{67{,}5344}$$

$$\underline{\overline{AC} = 8{,}22\text{ cm}}$$

b) Teilstrecke $\overline{FC}$ - Kathetensatz im ΔAHC:

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{FC}$$

$$\overline{FC} = \frac{\overline{CH}^2}{\overline{AC}} = \frac{1{,}88^2}{8{,}22}$$

$$\underline{\overline{FC} = 0{,}43\text{ cm}}$$

Teilstrecke $\overline{AF}$:

$$\overline{AF} = \overline{AC} - \overline{FC}$$

$$\overline{AF} = 8{,}22 - 0{,}43$$

$$\underline{\overline{AF} = 7{,}79\text{ cm}}$$

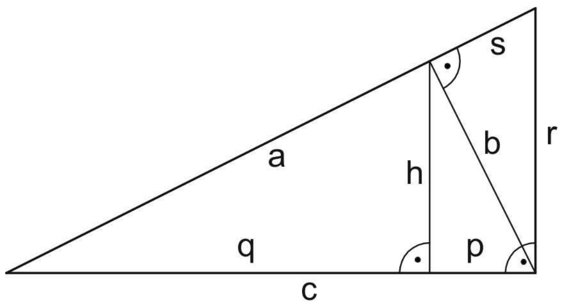
Senkrechte (Lot) auf $\overline{AC}$ - Höhensatz im ΔAHC:

$$\overline{FH}^2 = \overline{FC} \cdot \overline{AF}$$

$$\overline{FH} = \sqrt{0{,}43 \cdot 7{,}79}$$

$$\underline{\overline{FH} = 1{,}83\text{ cm}}$$

16. Berechnung von h – Pythagoras:



$$a^2 = q^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - q^2}$$

$$h = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28}$$

$$\underline{h = 5{,}29\text{ cm}}$$

Berechnung von p – Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(q+p)^2 = a^2 + b^2 \quad (1) \qquad b^2 = h^2 + p^2 \quad (2)$$

(2) in (1):

$$(q+p)^2 = a^2 + h^2 + p^2$$

$$(6+p)^2 = 8^2 + 28 + p^2$$

$$36 + 12p + p^2 = 92 + p^2$$

$$12p = 56$$

$$\underline{p = 4{,}67\text{ cm}}$$

- Lösungen -

Berechnung von b – Pythagoras:

$$b^2 = h^2 + p^2$$

$$b = \sqrt{5{,}29^2 + 4{,}67^2}$$

$$\underline{\underline{b = 7{,}06\ \text{cm}}}$$

Berechnung von c:

$$c = q + p$$

$$c = 6 + 4{,}67$$

$$\underline{\underline{c = 10{,}67\ \text{cm}}}$$

Berechnung von s – Pythagoras:

$$r^2 = b^2 + s^2 \qquad (1)$$

$$(a+s)^2 = c^2 + r^2 \qquad (2)$$

(1) in (2):

$$(a+s)^2 = c^2 + b^2 + s^2$$

$$a^2 + 2as + s^2 = c^2 + b^2 + s^2$$

$$2as = c^2 + b^2 - a^2 \qquad \Big|\ b^2 = h^2 + p^2 \text{ einsetzen}$$

$$s = \frac{c^2 + h^2 + p^2 - a^2}{2a}$$

$$s = \frac{10{,}67^2 + 5{,}29^2 + 4{,}67^2 - 8^2}{2 \cdot 8}$$

$$\underline{\underline{s = 6{,}23\ \text{cm}}}$$

---

17. Berechnung von r – Pythagoras im ΔMPQ:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-r)^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2ar + r^2 \qquad \Big|\ -r^2$$

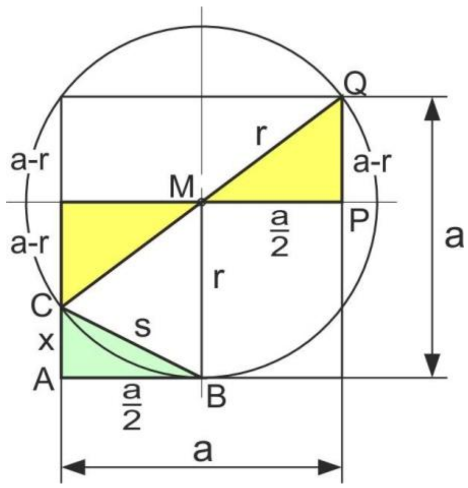
$$0 = \frac{5}{4}a^2 - 2ar \qquad \Big|\ \cdot \frac{4}{5}$$

$$0 = a^2 - \frac{8}{5}ar$$

$$\underline{0 = a\left(a - \frac{8}{5}r\right)} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \text{ oder } \ a - \frac{8}{5}r = 0$$

$$a = \frac{8}{5}r$$

$$\underline{\underline{r = \frac{5}{8}a}}$$



Berechnung von x:

$$x = a - 2(a-r)$$

$$x = a - 2a + 2r$$

$$\underline{x = 2r - a}$$

Berechnung von s – Pythagoras im ΔABC:

$$s^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$s^2 = (2r-a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

- Lösungen -

Berechnung von s (Fortsetzung):

$$s^2 = 4r^2 - 4ar + a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$s^2 = 4r^2 - 4ar + \frac{5}{4}a^2 \qquad \Big| \; r = \frac{5}{8}a$$

$$s^2 = 4 \cdot \left(\frac{5}{8}a\right)^2 - 4a \cdot \frac{5}{8}a + \frac{5}{4}a^2$$

$$s^2 = \frac{100}{64}a^2 - \frac{10}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2$$

$$s^2 = \frac{25}{16}a^2 - \frac{5}{4}a^2 = \frac{25}{16}a^2 - \frac{20}{16}a^2$$

$$s^2 = \frac{5}{16}a^2 \qquad \Big| \; \sqrt{}$$

$$s = \frac{a}{4}\sqrt{5}$$

---

18. Berechnung von c
Pythagoras im ΔABC:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 7^2 + 24^2$$

$$c = \sqrt{625}$$

$$c = 25 \text{ cm}$$

Berechnung von p und q
Kathetensatz:

$$a^2 = c \cdot p \qquad (\text{oder } b^2 = c \cdot q)$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{7^2}{25}$$

$$p = 1{,}96 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad q = c - p$$

$$q = 23{,}04 \text{ cm}$$

Berechnung von h_C
Höhensatz im ΔABC

$$h_C^2 = p \cdot q$$

$$h_C^2 = 1{,}96 \cdot 23{,}04$$

$$h_C = \sqrt{45{,}1584}$$

$$h_C = 6{,}72 \text{ cm}$$

Eine alternative Berechnungsmethode mit Hilfe des Flächeninhalts des ΔABC:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$c \cdot h_C = a \cdot b$$

$$h_C = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{7 \cdot 24}{25}$$

$$h_C = 6{,}72 \text{ cm}$$

---

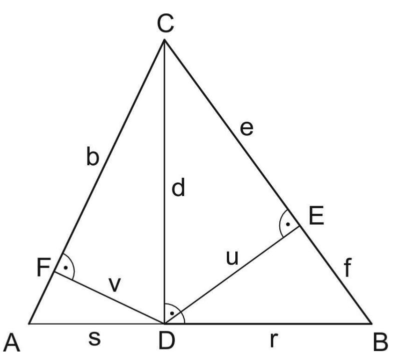
19. Länge u – Pythagoras im ΔCDE:

$$d^2 = u^2 + e^2$$

$$u^2 = d^2 - e^2$$

$$u = \sqrt{12^2 - 9{,}6^2} = \sqrt{51{,}84}$$

$$u = 7{,}20 \text{ cm}$$



- Lösungen -

Länge f – Höhensatz im ΔDBC:

$u^2 = e \cdot f$

$f = \frac{u^2}{e} = \frac{7{,}2^2}{9{,}6}$

$\underline{f = 5{,}4\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CB} = e + f = 15\text{ cm}}$

Länge r – Kathetensatz im ΔDBC:

$r^2 = f \cdot (e + f)$

$r = \sqrt{5{,}4 \cdot 15} = \sqrt{81}$

$\underline{r = 9\text{ cm}}$

Länge s – Pythagoras im ΔADC:

$b^2 = s^2 + d^2$

$s^2 = b^2 - d^2$

$s = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25}$

$\underline{s = 5\text{ cm}}$

Länge v – Flächenformel für das ΔADC:

$A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot d = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v$

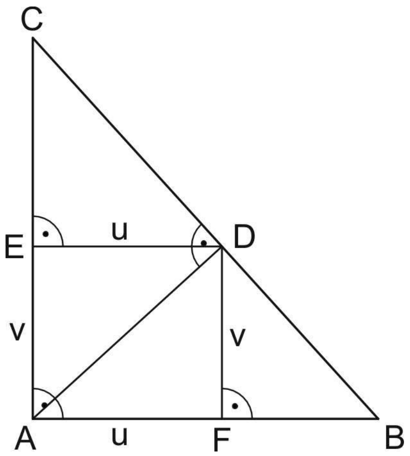
$s \cdot d = b \cdot v$

$v = \frac{s \cdot d}{b} = \frac{5 \cdot 12}{13}$

$\underline{\underline{v = 4{,}62\text{ cm}}}$

---

20. Länge $\overline{AD}$ – Pythagoras im ΔAFD:



$\overline{AD}^2 = u^2 + v^2$

$\overline{AD}^2 = 3^2 + 4^2$

$\overline{AD} = \sqrt{25}$

$\underline{\overline{AD} = 5\text{ cm}}$

Länge $\overline{FB}$ – Höhensatz im ΔABD:

$v^2 = u \cdot \overline{FB}$

$\overline{FB} = \frac{v^2}{u} = \frac{4^2}{3}$

$\underline{\overline{FB} = 5{,}33\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = u + \overline{FB}$

$\underline{\overline{AB} = 8{,}33\text{ cm}}$

Länge $\overline{EC}$ – Höhensatz im ΔADC:

$u^2 = v \cdot \overline{EC}$

$\overline{EC} = \frac{u^2}{v} = \frac{3^2}{4}$

$\underline{\overline{EC} = 2{,}25\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = v + \overline{EC}$

$\underline{\overline{AC} = 6{,}25\text{ cm}}$

Länge $\overline{BC}$ – Pythagoras im ΔABC:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

$\overline{BC} = \sqrt{8{,}33^2 + 6{,}25^2} = \sqrt{108{,}4514}$

$\underline{\overline{BC} = 10{,}42\text{ cm}}$

Dreiecksumfang:

$U = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 8{,}33 + 6{,}25 + 10{,}42$

$\underline{\underline{U = 25\text{ cm}}}$

Dreiecksfläche:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}33 \cdot 6{,}25$

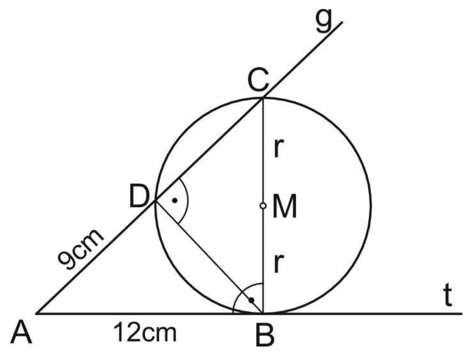
$\underline{\underline{A_{\Delta ABC} = 26{,}03\text{ cm}^2}}$

- Lösungen -

21. Der Schnittpunkt D liegt auf dem Thaleskreis über [BC].
Daraus folgt:

$\sphericalangle BDC = 90°$ und

$\overline{BD}$ ist Höhe im ΔABC



Strecke $\overline{AC}$ - Kathetensatz im ΔABC:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}} = \frac{12^2}{9}$$

$$\underline{\overline{AC} = 16\text{ cm}}$$

Strecke $\overline{BC}$ - Pythagoras im ΔABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{16^2 - 12^2} = \sqrt{112}$$

$$\underline{\overline{BC} = 10{,}58\text{ cm}}$$

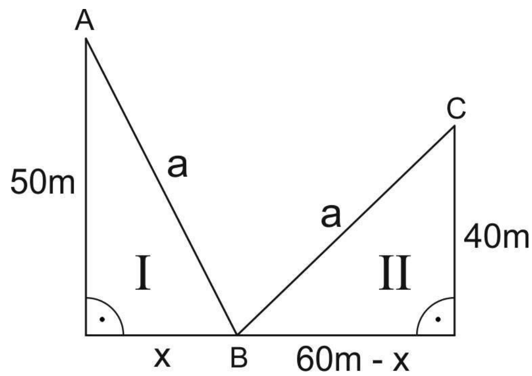
Radius $r = \frac{\overline{BC}}{2}$

$$\underline{r = 5{,}29\text{ cm}}$$

---

22. Jeweils Pythagoras in den Dreiecken I und II:

$$\left| \begin{array}{ll} a^2 = 50^2 + x^2 & \text{(I)} \\ a^2 = 40^2 + (60 - x)^2 & \text{(II)} \end{array} \right.$$



$(I) = (II)$:

$$50^2 + x^2 = 40^2 + (60 - x)^2$$

$$2500 + x^2 = 1600 + 3600 - 120x + x^2 \quad \left| -x^2 \right.$$

$$2500 = 5200 - 120x$$

$$120x = 2700$$

$$\underline{x = 22{,}5\text{ m}}$$

Der Brunnen ist vom höheren Turm **22,5 m** und vom niedrigeren Turm **37,5 m** entfernt.

---

23. Das A4-Blatt hat folgende Abmessungen: $a = 297\text{ mm}$, $b = 210\text{ mm}$

Der Berührpunkt B und ein Kreismittelpunkt M sind zwei Punkte eines gedachten rechtwinkligen Dreiecks (siehe Seite 11).

Die längere Kathete hat das Maß $\frac{a}{2} - r$; die kürzere Kathete hat das Maß $\frac{b}{2} - r$

Daraus folgt nun für das Dreieck:

- Lösungen -

Pythagoras:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - r\right)^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4} - ar + r^2 + \frac{b^2}{4} - br + r^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + 2r^2 - ar - br$$

$$0 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right) + r^2 - r\left(a + b\right)$$

$$0 = r^2 - r\left(a + b\right) + \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$a = 297;\; b = 210$$

$$0 = r^2 - r\left(297 + 210\right) + \frac{1}{4}\left(297^2 + 210^2\right)$$

$$0 = r^2 - 507 \cdot r + 33077{,}25$$

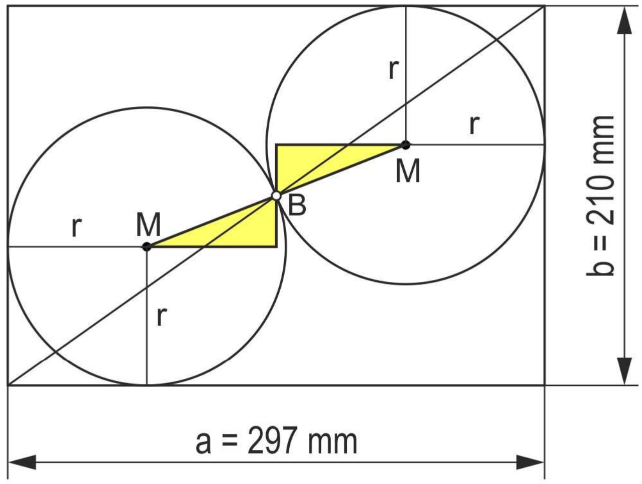
$$r_{1/2} = \frac{507 \pm \sqrt{\left(-507\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33077{,}25}}{2 \cdot 1}$$

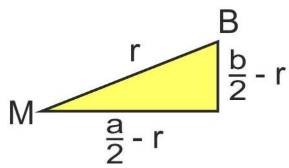
$$r_{1/2} = 253{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{257049 - 132309}$$

$$r_{1/2} = 253{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{124740}$$

$$\underline{r_1 = 76{,}91} \quad \left(r_2 = 430{,}1 \text{ keine Lösung}\right)$$

Kreisdurchmesser: $\underline{\underline{d = 153{,}8\text{ mm}}}$





---

24. Pythagoras:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

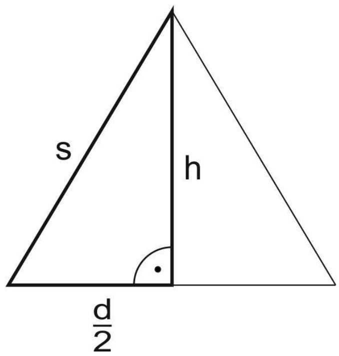
$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 18^2 - 11^2$$

$$h = \sqrt{203}$$

$$\underline{\underline{h = 14{,}25\text{ cm}}}$$

Axialschnitt des Kegels



- Lösungen -

25. Flächendiagonale d:

$d^2 = \ell^2 + b^2$

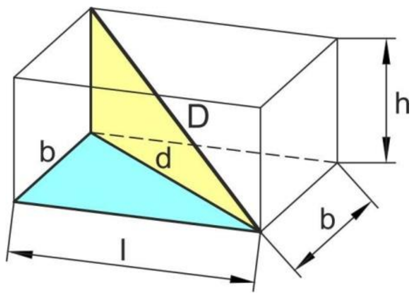
Raumdiagonale D:

$D^2 = d^2 + h^2$

$D^2 = \ell^2 + b^2 + h^2$

$D = \sqrt{42^2 + 28^2 + 16^2} = \sqrt{2804}$

$\underline{\underline{D = 52{,}95\ \text{cm}}}$



---

26. Das Dreieck EBG ist gleichseitig, denn $\overline{BE} = \overline{BG} = \overline{EG}$ sind jeweils Flächendiagonalen des Würfels.

Für die Länge dieser Diagonalen gilt:

$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$

$\overline{BE}^2 = 8^2 + 8^2$

$\overline{BE} = \sqrt{128}$

$\underline{\overline{BE} = 8\sqrt{2}\ \text{cm}}$

Höhe h – Pythagoras:

$h^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2$

$h^2 = 128 - 32$

$h = \sqrt{96}$

$\underline{h = 4\sqrt{6}\ \text{cm}}$

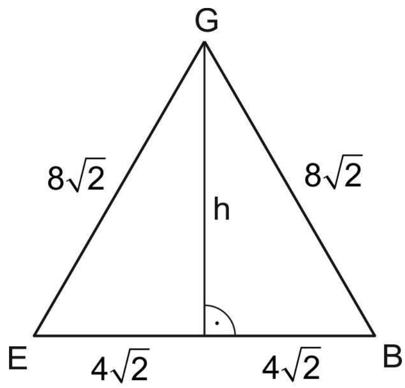
Flächeninhalt ΔEBG:

$A_{\Delta EBG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot h$

$A_{\Delta EBG} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6}$

$A_{\Delta EBG} = 16\sqrt{12}$

$\underline{\underline{A_{\Delta EBG} = 32\sqrt{3}\ \text{cm}^2}}$



---

27. a) Zunächst sind die Längen der Dreieckseiten zu bestimmen:
(Zeichnung siehe Seite 13)

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(19-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{325} = \underline{5\sqrt{13}\ \text{LE}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(11-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{225} = \underline{15\ \text{LE}}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(19-11)^2 + (15-9)^2} = \sqrt{100} = \underline{10\ \text{LE}}$$

- Lösungen -

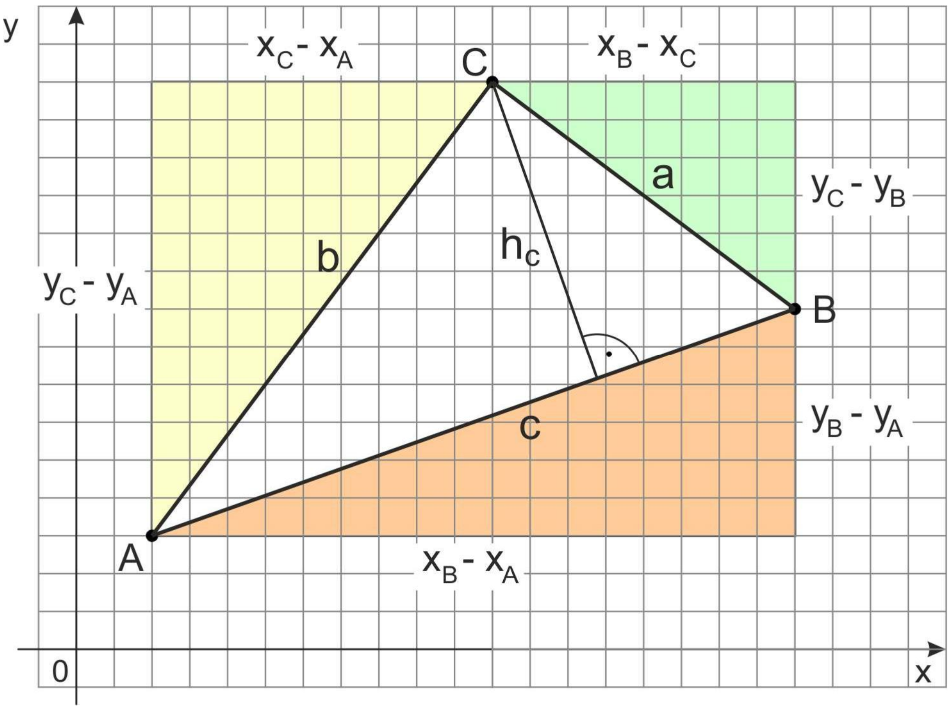
Zur Überprüfung des Dreiecks ABC auf Rechtwinkligkeit wird der Satz des Pythagoras angewendet. Ist bei einem Dreieck die Aussage $c^2 = a^2 + b^2$ wahr, dann ist dieses Dreieck rechtwinklig. Für unser gegebenes Dreieck gilt:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\left(5\sqrt{13}\right)^2 = 15^2 + 10^2$$

$$\underline{\underline{325 = 325 \quad \text{wahr}}}$$

Für die Zeichnung: Längeneinheit 0,5 cm



b) Der senkrechte Abstand des Punktes C auf [AB] entspricht der Höhe h_C im Dreieck ABC. Man kann die Höhe h_C über den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_C$$

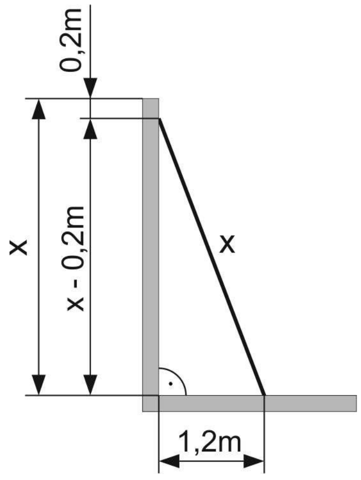
$$\overline{BC} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot h_C$$

$$h_C = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{10 \cdot 15}{5\sqrt{13}} = \frac{30}{\sqrt{13}}\,\text{LE}$$

$$\underline{\underline{h_C = 8{,}32\,\text{LE}}}$$

- Lösungen -

28. Höhe der Wand = Leiterlänge x
Nebenstehende Skizze zeigt, dass im rechtwinkligen Dreieck die Leiterlänge x (Hypotenuse) mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden kann:



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Big| \text{ Pythagoras allgemein}$$

$$x^2 = 1{,}2^2 + (x - 0{,}2)^2$$

$$x^2 = 1{,}44 + x^2 - 0{,}4x + 0{,}04$$

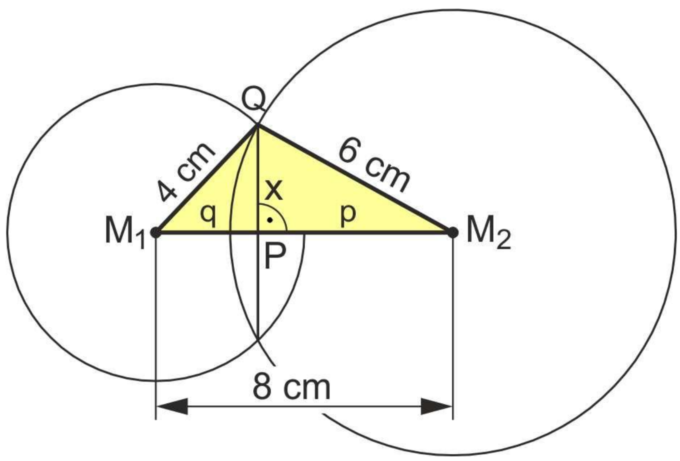
$$0{,}4x = 1{,}48$$

$$\underline{\underline{x = 3{,}7\text{ m}}}$$

---

29. Das Dreieck M_1M_2Q wird durch die halbe Sehne x in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt:

ΔM_1PQ und ΔPM_2Q



Lösungsansatz

ΔM_1PQ - Pythagoras:

$$\overline{M_1Q}^2 = q^2 + x^2 \quad \Big| \ \overline{M_1Q} = 4\text{ cm}$$

$$\underline{x^2 = 4^2 - q^2 \quad (1)}$$

ΔPM_2Q - Pythagoras:

$$\overline{M_2Q}^2 = p^2 + x^2 \quad \Big| \ \overline{M_2Q} = 6\text{ cm}$$

$$\underline{x^2 = 6^2 - p^2 \quad (2)}$$

$$p + q = 8\text{ cm}$$

$$\underline{p = 8 - q \quad (3)}$$

$\underline{(1) = (2) + (3):}$

$$4^2 - q^2 = 6^2 - p^2$$

$$4^2 - q^2 = 6^2 - (8 - q)^2$$

$$16 - q^2 = 36 - 64 + 16q + q^2$$

$$16q = 44$$

$$\underline{\underline{q = 2{,}75\text{ cm}}}$$

$q = 2{,}75\text{ cm}$ einsetzen in (1):

$$x^2 = 4^2 - 2{,}75^2$$

$$x = \sqrt{8{,}4375}$$

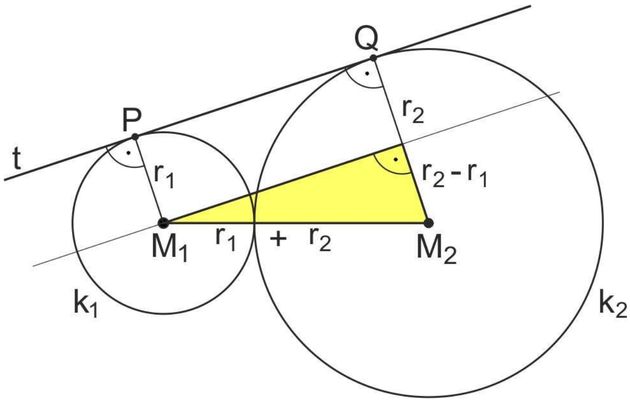
$$\underline{\underline{x = 2{,}905\text{ cm}}}$$

Länge der Sehne: $\ell = 2x = \underline{\underline{5{,}81\text{ cm}}}$

- Lösungen -

30. Die Strecken (Lote) $\overline{M_1P}$ und $\overline{M_2Q}$ stehen senkrecht auf der Tangente t.

Verschiebt man die Tangente parallel bis sie durch M_1 verläuft, ergibt sich das farbig markierte rechtwinklige Dreieck in der nebenstehenden Zeichnung.



Nach Pythagoras erhält man:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{PQ}^2 + (r_2 - r_1)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{M_1M_2}^2 - (r_2 - r_1)^2$$

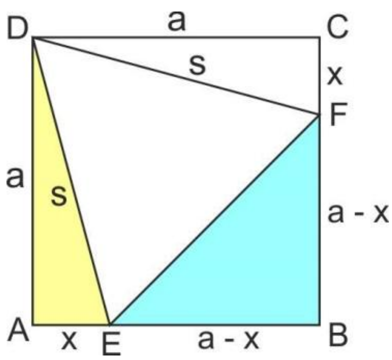
$$\overline{PQ} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2+6)^2 - (6-2)^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

$$\underline{\overline{PQ} = 6{,}93\ \text{cm}}$$

---

31. Nach dem Satz des Pythagoras gilt im:



$\Delta AED: \quad s^2 = a^2 + x^2 \qquad (1)$

$\Delta EBF: \quad s^2 = (a-x)^2 + (a-x)^2 \qquad (2)$

$$(1) = (2): \quad a^2 + x^2 = (a-x)^2 + (a-x)^2$$

$$a^2 + x^2 = 2(a-x)^2$$

$$a^2 + x^2 = 2a^2 - 4ax + 2x^2$$

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-4a) \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4a \pm \sqrt{12a^2}}{2} = \frac{4a \pm 2a\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1/2} = 2a \pm a\sqrt{3} \quad \big|\ a = 10$$

$$x_{1/2} = 20 \pm 10\sqrt{3}$$

$$x_1 = 20 - 10\sqrt{3} \qquad \left(x_2 = 20 + 10\sqrt{3}\ \text{keine Lösung}\right)$$

$$\underline{x = 2{,}68\ \text{cm}}$$

Seitenlänge s des Dreiecks:

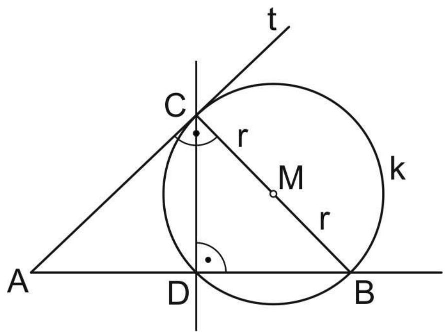
$$s^2 = a^2 + x^2$$

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{10^2 + 2{,}68^2}$$

$$\underline{s = 10{,}35\ \text{cm}}$$

- Lösungen -

32. Die Tangente t steht senkrecht auf dem Kreis k mit Radius $\overline{MC} = r$.
Der Schnittpunkt D auf der Sekante AB liegt auf dem Thaleskreis über [BC]. Damit ist das Dreieck BCD bei D senkrecht.



Strecke $\overline{BC}$ - Kathetensatz im Dreieck ABC:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{BC}^2 = \left(\overline{AB} - \overline{AD}\right) \cdot \overline{AB}$$

$$(2r)^2 = (14-4) \cdot 14$$

$$4r^2 = 140$$

$$r^2 = \sqrt{35}$$

$$\underline{\underline{r = 5{,}92\,\text{cm}}}$$

Flächeninhalt ΔABC:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 6{,}32$$

$$\underline{\underline{A_{\Delta ABC} = 44{,}24\,\text{cm}^2}}$$

Nebenrechnung:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(2r)^2 - 10^2} = \sqrt{11{,}83^2 - 10^2} = \sqrt{40}$$

$$\underline{\overline{CD} = 6{,}32\,\text{cm}}$$