Gymnasium

2. Stegreifaufgabe Mathematik

Klasse 11

- Lösungen -

1.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 0,\ \text{da } \sqrt{x} = 0 \text{ und } \frac{\sin x}{x} = 1$$

oder Berechnung mit der L´Hospital-Regel:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u´(x)}{v´(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\left(4\sqrt{x}\cdot\cos x\right) = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(x^3\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = a$$

$\Rightarrow$ Substitution durch $y = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow a = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{y^3}\cdot\sin y\right) = 0,\ \text{da } \frac{1}{y^3} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2\cos 2x} = \frac{3}{2} \quad \text{(L´Hospital-Regel)}$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^8} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot x^7} = \begin{cases} +\infty \text{ für } x > 0 \\ -\infty \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

- Lösungen-

2. $$\lim_{x\to -1}\frac{x\left(\sin(x+1)\right)+\sin(x+1)}{2\cdot(x+1)^2}$$

$\Rightarrow x = -1-h$

$$\text{LG: } \lim_{h\to 0}\frac{\left(-1-h\right)\cdot\sin(-1-h+1)+\sin(-1-h+1)}{2\cdot(-1-h+1)^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(-1-h\right)\cdot\sin(-h)+\sin(-h)}{2\cdot h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)\cdot\left[\left(-1-h\right)+1\right]}{2\cdot h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{-2\cdot h}= \quad \text{(L´Hospital-Regel)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1\cdot\cos(-h)}{-2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\cos(-h)}{-2}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \mathrm{x} = -1+\mathrm{h}$

$$\text{RG: } \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\left(-1+\mathrm{h}\right)\cdot\sin(-1+\mathrm{h}+1)+\sin(-1+\mathrm{h}+1)}{2\cdot\left(-1+\mathrm{h}+1\right)^2}=$$

$$=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{(-1+\mathrm{h})\cdot\sin(\mathrm{h})+\sin(\mathrm{h})}{2\cdot \mathrm{h}^2}=$$

$$=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\sin(\mathrm{h})\cdot\left(-1+\mathrm{h}+1\right)}{2\cdot \mathrm{h}^2}=$$

$$=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\sin(\mathrm{h})}{2\cdot \mathrm{h}}= \quad \text{(L´Hospital-Regel)}$$

$$=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\cos(\mathrm{h})}{2}=\frac{1}{2}$$
