Affine (lineare) Funktionen $f(x) = mx + t$

Klassen 9 - 11

1. Gib die Gleichung einer Geraden durch P mit der Steigung m an:

a) $P(0|0)$; $m = -2$

b) $P(1|2)$; $m = \frac{2}{3}$

c) $P(-4|0)$; $m = 0$

2. Gegeben sind die Punkte P und Q. Gib die Gleichung der Geraden PQ an.
Wie ist jeweils die Steigung ?

a) $P(-3|5)$; $Q(2|6)$

b) $P(-4|-5)$; $Q(3|-8)$

3. Wie lautet die affine (lineare) Funktion, deren Graph parallel zur Geraden $f(x) = 0{,}6x - 4$ verläuft und den Punkt $A(2|-6)$ enthält ? $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

4. Gib die affine (lineare) Funktion an, deren Graph die Nullstelle $x_0 = 2{,}5$ hat und die y-Achse im Punkt $P(0|-8)$ schneidet. $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

5. Die Gerade g hat die Gleichung: $y = 0{,}75x + 2$.

a) Stelle die Gleichung derjenigen Geraden h auf, die parallel zu g und durch den Punkt $P(3|7)$ verläuft.

b) Ermittle die Gleichung der orthogonalen Geraden k zu g durch den Ursprung.

6. Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Graphen g_1: $f(x) = 2x$ mit g_2: $g(x) = -0{,}5x+1$.

7. Gegeben ist die Funktion g: $x \mapsto 2x - 1{,}2$. $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$

a) Zeichne den Graphen G_g der Funktion.

b) Der Punkt $Q(-2|y_Q)$ liegt auf G_g . Bestimme y_Q .

c) Durch Q soll eine Gerade h verlaufen, die mit G_g einen Winkel von 40° bildet.
Wie lautet die Geradengleichung ?

8. Berechne den Schnittwinkel der beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks ABCD mit $A(6|2)$; $B(1|7)$; $C(-3|-1)$ und $D(4|-2)$.

9. Durch den Punkt $P(2|y_P)$ mit $P \in G_f$ soll eine Gerade gelegt werden, die mit der Geraden $f(x) = -2x + 2$ einen Winkel von 45° bildet. Erstelle die Geradengleichung.

10. Gegeben sei die affine Funktion f: $f(x) = \sqrt{3}\,x - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

a) Fertige eine Zeichnung von f im Koordinatensystem an.

b) Der Punkt $P(x_P|\,3\sqrt{3}\,)$ liegt auf dem Graphen zu f. Berechne x_p .

c) Wie lautet die Funktion g(x) deren Graph mit dem Graphen von f einen Winkel von 120° bildet und die durch P verläuft ?

11. Der Neigungswinkel einer Geraden zur x-Achse beträgt 30°. Die Gerade verläuft durch den Punkt R(-2|-5). $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

a) Wie lautet die Funktionsgleichung ?

b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen.

c) Gib die Gleichung der Geraden an, die durch den Koordinatenursprung verläuft und auf der gegebenen Geraden senkrecht steht.

d) Wie heißt die Umkehrfunktion zur gegebenen Geraden ?
Gib deren Steigungswinkel α an.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

1. Erkläre folgende Begriffe:

a) Ursprungsgerade

b) Steigung bzw. Steigungsdreieck

c) Steigende u. fallende Gerade

d) Geradenbüschel, Parallelenschar

e) y-Achsenabschnitt

f) Lineare Funktion

g) Normalform der linearen Funktion

2. Zeichne die durch folgende Gleichungen gegebenen Geraden in ein Koordinatensystem und gib zu jeder Geraden ihre Steigung an.

a) $y = 2x$ b) $y = -\frac{1}{3}x$ c) $y = -4{,}5x$ d) $-2x - 3y = 0$

e) $\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}x = 0$ f) $3y - 3x = 0$

3. Prüfe <u>durch Rechnung</u> nach, ob folgende Punkte auf der jeweiligen Geraden liegen.

a) $P_1\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{1}{5}\right)$; $P_2(-0{,}6 \mid -1{,}5)$ $g_1:\ 5x - 2y = 0$

b) $A(6 \mid 3)$; $B(-5 \mid -2)$ $g_2:\ -5y + 2x = 0$

4. Gib jeweils die Gleichung der Geraden an, die durch den Ursprung (0 I 0) und einen der folgenden Punkte verläuft.

a) $A(2{,}5 \mid -3)$ b) $B(-4{,}5 \mid 0)$ c) $C\left(\frac{1}{3} \middle| -1\frac{2}{5}\right)$

Anleitung: Die Gleichung einer Ursprungsgeraden hat die Form y = mx.
Die Koordinaten der Punkte gehören zur Lösungsmenge. Setze die Koordinaten der Punkte für x und y ein und ermittle damit m.

5. Prüfe <u>durch Rechnung</u>, ob folgende Punkte auf derselben Ursprungsgerade liegen

a) $A_1(0{,}3 \mid 2{,}7)$ $A_2(0{,}6 \mid 0{,}54)$

b) $B_1\left(\frac{1}{5} \middle| 0{,}8\right)$ $B_2\left(0{,}4 \middle| \frac{8}{5}\right)$

c) $C_1(6 \mid 3)$ $C_2(-6 \mid -3)$

6. Gegeben sind die Funktionen $g_1: y = -\frac{1}{4}x$ und $g_2: -5y + 12x = 0$

Zeichne jeweils den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem und dazu den Graph der entsprechenden Umkehrfunktion g_1^{-1} und g_2^{-1}. Gib die Funktionsgleichung der Umkehrfunktionen an.

Hinweis: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung der Funktion an der Geraden y = x.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

7. Gegeben sind die Geraden $g_1: y - 0{,}45x = 0$ und $g_2: 6x + 10y = 0$.

Zeichne die gegebenen Geraden und die im Koordinatenursprung auf ihnen senkrecht stehenden Geraden. Ermittle deren Funktionsgleichung.

8. Bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Achsen ($x = 0$, $y = 0$)

a) $5x - 2y + 1 = 0$ b) $y = -2(x+2) + 6$ c) $0{,}75(x+2) - 3 - y = 0$

9. a) Die Gerade g hat die Steigung $m = 2{,}5$ und verläuft durch den Punkt $S(-3 \mid -17)$. Wie lautet die Geradengleichung in der Normalform?

b) Ermittle durch Rechnung die Normalform einer Geradengleichung deren y-Achsenabschnitt $-4{,}5$ ist und deren Graph durch den Punkt $A\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{5}{6}\right)$ verläuft.

10. Bestimme die Gleichungen der Geraden durch folgende Punkte mit drei verschiedenen Lösungswegen.

a) $A(0 \mid -3)$ und $B(1{,}5 \mid 4)$

b) $P(-6 \mid -7)$ und $Q(-11 \mid 2{,}5)$

c) $S(12 \mid 1{,}5)$ und $T(8 \mid -1{,}5)$

11. Die Punkte $A(0 \mid -4)$ und $B(10 \mid 0)$ liegen auf der Geraden g, die Punkte $P(-0{,}5 \mid 11)$ und $Q(8{,}5 \mid -2{,}5)$ liegen auf der Geraden h.

Bestimme durch Rechnung jeweils die Funktionsgleichung der beiden Geraden und die Koordinaten ihres Schnittpunkts S.

Ermittle die Schnittpunkte der Geraden h mit den Koordinatenachsen.

12. a) Gegeben sind die beiden Funktionen $f: y = -0{,}5x + 3$ und $g: 3x - 2y = 6$. Zeichne die zu den Funktionen gehörenden Graphen in ein Koordinatensystem und **berechne** ihren gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Gegeben sind zwei **unvollständige** lineare Funktionen:

$g: y = -4x + ...$

$h: y = ...x + 5$

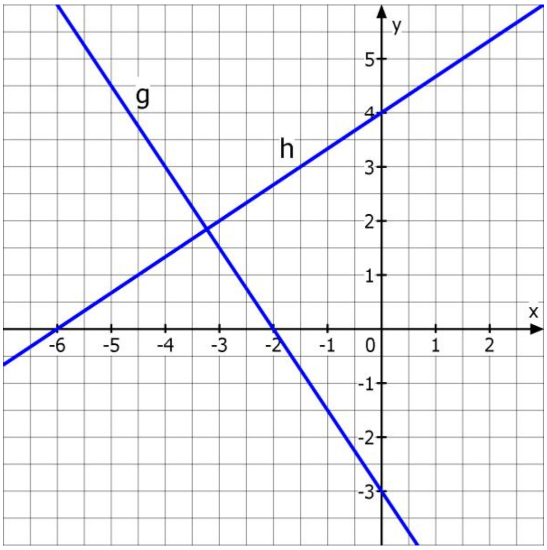
Vervollständige beide Funktionsgleichungen für folgende Bedingungen:
Beide Geraden stehen senkrecht aufeinander, und
die Gerade g verläuft durch den Punkt $P(-2{,}5 \mid 12)$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

13. a) Gegeben sind die Geraden g und h zweier linearer Funktionen (siehe nebenstehendes Bild).

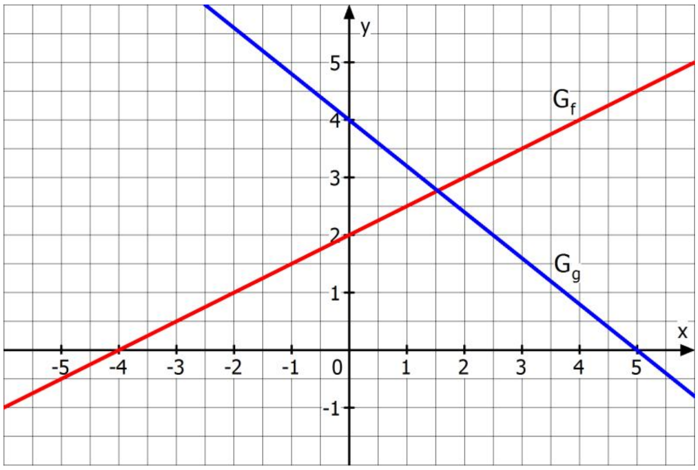
Zeichne zu jeder Geraden ein Steigungsdreieck und gib die beiden Geradengleichungen an.



b) Bestimme die Gleichung der Geraden s, die parallel zur Geraden $y = -0{,}2x + 16$ und durch den Punkt $R(-3\,|\,-1)$ verläuft.

c) Bestimme die Gleichung der Geraden t, die durch den Punkt $S(-3\,|\,-4)$ verläuft und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet.

14. a) Gib zu den Graphen G_f und G_g jeweils die Zuordnungsvorschrift an. Lese günstige Werte aus dem Diagramm ab.



b) Begründe rechnerisch, ob der Punkt $P(-40\,|\,-17{,}5)$ genau auf, über oder unter dem Graphen G_f liegt.

15. Gegeben ist die Gerade g mit $y + 3{,}5(x-2) + 5 = 0$.

Bestimme die auf der gegebenen Geraden senkrecht stehende Gerade h. Der Schnittpunkt beider Geraden soll auf der x-Achse liegen. Gib die Geradengleichung von h an.

16. Die Gerade $g:\ y = -\frac{5}{4}x + 5$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

17. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2{,}5x - 2$.

a) Zeige, dass der Punkt $P(4\,|\,8)$ auf g liegt.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden f, die durch P geht und senkrecht auf g steht (Skizze !).

c) Die beiden Geraden schneiden die Senkrechte $x = -1$ in den Punkten R und S. Berechne die Fläche des Dreiecks PRS (Skizze !)

18. Gegeben sind die beiden Geradengleichungen $m:\ y = 3x - 1$ und $n:\ y = -\frac{3}{2}x + 8$.

a) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt S der beiden Geraden.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Geraden m und n mit der x-Achse einschließen. (Skizze!)

19. a) Zeichne die Gerade $g:\ y = -\frac{2}{3}x + 3$ in ein Koordinatensystem. Spiegle die Gerade g sowohl an der x-Achse als auch an der y-Achse als auch am Ursprung. Gib jeweils die Funktionsgleichungen an.

b) Die vier Geraden aus Teilaufgabe a) schließen ein Viereck ein. Ermittle den Flächeninhalt dieses Vierecks. $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$

20. a) Zeichne die Menge aller Punkte $S(x\,|\,-0{,}5x + 2)$ in ein Koordinatensystem $(x \in \mathbb{Q})$. Auf welcher Ortslinie liegen sie?

b) Die Punkte S werden mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ parallel verschoben. Die Bildpunkte heißen T. Zeichne die Ortslinie der Punkte T ein. Gib die Menge aller Punkte T in Koordinatenschreibweise an.

21. Die Gleichung $y = 3x - (a + 2)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ beschreibt bezüglich $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ die Parallelenschar g(a).

a) Gib die Gleichung der Scharparallelen g_1 an, die durch den Punkt $A(-6\,|\,1{,}5)$ verläuft.

b) Belegt man a einmal mit 2 und dann mit -8, erhält man zwei Geraden g_2 und g_3. Ermittle die Gleichung der Mittelparallelen g_4 zu den Parallelen g_2 und g_3. Gib die zugehörige Zahl a an.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

22. Gegeben ist die Gleichung einer Parallelenschar g(t): $y = -2x + t$.

a) Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g_1: $2x - 3y + 5 = 0$ der Parallelenschar angehört.

b) Für welchen Wert von t erhält man jeweils die Gleichung der Schargeraden, die durch die Punkte $A\left(-2\,|\,3\right)$ und $B\left(1{,}5\,|\,-8\right)$ verlaufen?

c) Gibt es eine Schargerade die zugleich durch die Punkte $P_1\left(-4\,|\,4\right)$ und $P_2\left(3\,|\,-5\right)$ verläuft? Zeige dies rechnerisch.

d) Wie lautet die Gleichung der Parallelenschar h(t), deren Geraden auf denen der gegebenen Schar g(t) senkrecht stehen?

23. Alle Geraden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, gehören einem Geradenbüschel an.

a) Durch welchen Punkt Q verlaufen alle Geraden des Geradenbüschels $g(m): y = mx + 3$?

b) Für welche Werte von m erhält man die Gleichungen der Büschelgeraden, die durch die Punkte $A\left(0{,}4\,|\,3\right)$, $B\left(-2\,|\,4\right)$ und $C\left(2{,}5\,\middle|\,-\frac{1}{3}\right)$ verlaufen?

c) Zeige rechnerisch, ob es eine Büschelgerade gibt, die gleichzeitig durch die Punkte $U\left(2\,|\,5\right)$ und $V\left(-3\,|\,0\right)$ verläuft.

d) Ein zweites Geradenbüschel h(m) hat den Büschelpunkt $R\left(3\,|\,4\right)$. Gib die Gleichung des Geradenbüschels an.

e) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die beiden Büscheln gleichzeitig angehört?

f) Gib die Gleichungen der Geraden beider Büschel an, die auf der Geraden mit $y = \frac{1}{3}x + 3$ senkrecht stehen.

24. Das Geradenbüschel g(m) mit $y - mx + 2m + 5 = 0$ und die Parallelenschar g(t) mit $y - 2x - t = 0$ sind gegeben.

a) Bringe die Büschelgleichung auf die Form $y = m\left(x - x_1\right) + y_1$ (Punkt-Steigungsform) und gib die Koordinaten des Büschelpunktes B an.

b) Zeichne den Büschelpunkt, die Büschelgeraden für $m \in \left\{0; \pm 1; \pm 3\right\}$ und die Schargeraden für $t \in \left[-4;\ 4\right]_{\mathbb{Z}}$ in ein Koordinatensystem.

c) Gib die Gleichung derjenigen Büschelgeraden an, die auch Ursprungsgerade ist.

d) Welche Gerade der Parallelenschar ist gleichzeitig Büschelgerade?

e) Welche der Büschelgeraden steht auf allen Schargeraden der Parallelenschar senkrecht?

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

25. Gegeben sind die Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(k\,|\,-2)$.

a) Stelle in Abhängigkeit vom Parameter k die Funktionsgleichung der Schar $f_k(x)$ auf, die durch die Punkte P und Q bestimmt wird. Welche Werte darf hierbei der Parameter k annehmen?

b) Bestimme die Schnittpunkte S_x und S_y der Funktionenschar mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit vom Parameter k.

c) Gib diejenigen Geraden aus der Schar an, die parallel zur x-Achse bzw. parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verlaufen.

d) Welche Gerade aus der Schar steht senkrecht auf der Geraden $h(x) = -4x + 3$? Gib die Gleichung dieser Geraden an. Bestimme außerdem den Schnittwinkel dieser Geraden mit der x-Achse.

e) Haben alle Geraden der Funktionenschar einen gemeinsamen Schnittpunkt? Wenn ja, gib diesen an.

26. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt $P(1\,|\,3)$ und hat eine Nullstelle bei x = 5.

a) Erstelle die Funktionsgleichung.

b) Berechne den Neigungswinkel α gegen die x-Achse.

c) $Q(3\,|\,q)$ soll stets unterhalb von g liegen. Welche Bedingungen muss q erfüllen?

27. Gegeben ist die Gerade $g: f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$.

a) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die zu g parallel sind.

b) Erstelle die Gleichung aller Geraden, die den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben.

28. Gegeben ist der Punkt $P(4\,|\,1)$ und die Funktionenschar mit der Gleichung

$f_m(x) = (m-1)x + 2m\,; \quad m \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die den Punkt P enthält.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden aus der Schar, die auf $h(x) = -2x + 8$ senkrecht steht.

c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_x und S_y mit den Koordinatenachsen.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

e) Zeichne die in a) und b) ermittelten Geraden in ein Koordinatensystem ein.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

29. Gegeben ist die Geradenschar $g_k : y = (2k-1)x + k; \quad k \in \mathbb{R}$

a) Für welches k verläuft die zugehörige Gerade der Schar durch $P(1|-3)$?
Gib die entsprechende Funktionsgleichung an.

b) Bestimme k so, dass die Schargerade parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten verläuft.

c) Berechne die Nullstelle sowie den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse in Abhängigkeit von k.

d) Gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden der Schar?

30. Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:

Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bestimmen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt 8 FE. (FE = Flächeneinheiten)

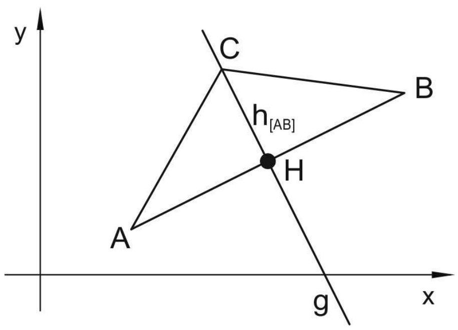
Bestimme die Scharfunktion f in Abhängigkeit von der Nullstelle der Schargeraden mit der x-Achse.

31. Ein Zeichner will die Gerade mit der Gleichung $2x - \frac{1}{3}y + 6 = 0$ durch die Punkte $P_1\left(\frac{2}{3}\middle|7{,}5\right)$ und $P_2\left(\frac{1}{3}\middle|20\right)$ ziehen. Liegen die Punkte auf der Geraden?

32. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit $A(2|1)$.

Die Dreieckshöhe $h_{[AB]}$ liegt auf der Geraden g: $y = -2x + 12{,}5$.

Berechne die Koordinaten des Höhenfußpunktes H. (siehe nebenstehende Skizze).



33. Gegeben sind die Gerade g mit $y + \frac{2}{3}x - 4 = 0$ und der Punkt $P(12|15{,}5)$.
Der Punkt P ist mit g als Spiegelachse mittels Achsenspiegelung auf P' abzubilden.
Berechne die Koordinaten von P'.

34. Die Geraden $g_1 = \overline{AB}$ mit $A(-1{,}5|0)$ und $B(0|3)$ sowie $g_2 = \overline{CD}$ mit $C(0|-2)$ und $D(6|0)$ als auch $g_3 = \overline{EF}$ mit $E(8|1)$ und $F(2|9)$ sind gegeben.

Ermittle zeichnerisch **und** rechnerisch die Punkte $S \in g_1$ und $T \in g_2$ deren Verbindungsstrecke [ST] zu g_3 parallel verläuft und 6 cm lang ist.
(Koordinatensystem: 1LE = 1cm)

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

35. Der Neigungswinkel einer Geraden g beträgt 60°. Auf ihr liegt der Punkt $P\left(-4 \,\middle|\, 0{,}5\right)$.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf (keine Näherungswerte).

b) Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen.

c) Wie heißt die Funktion h mit derselben Nullstelle, deren Graph die Steigung $m = -\frac{1}{5}$ hat?

36. Gegeben ist die Gerade $g:\ y = -x + 2;\quad D = \mathbb{R}$

Durch den Punkt $P\left(1 \,\middle|\, 1\right) \in g$ soll eine Gerade h gelegt werden, die mit der Geraden g einen Winkel von 30° bildet. Wie lautet die Gleichung der Geraden h ?
(zwei Möglichkeiten)

37. Gegeben sind ein Achsenschnittpunkt $N\left(-3 \,\middle|\, 0\right)$ einer Geraden und der Abstand $\overline{NT} = 5$ der beiden Achsenschnittpunkte.

Berechne die Koordinaten des zweiten Achsenschnittpunktes T und stelle die Gleichung der Geraden auf (2 Möglichkeiten).

38. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = tx - |t|;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_f = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen haben die Scharfunktionen?

b) Für welche Werte von t schneiden sich zwei Schargeraden auf der y-Achse?

39. Gegeben ist die Scharfunktion $g_a(x) = |a|x + a;\quad a \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Welche Nullstellen hat diese Schar?

b) Für welche Werte von a sind zwei Geraden aus der Schar zueinander parallel?

40. Gegeben ist die Scharfunktion $g_t(x) = -tx + t;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Zeige, dass alle Graphen der Schar eine gemeinsame Nullstelle haben.

b) Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y-Achse und zwei zueinander senkrechten Schargeraden begrenzt ist.

c) Für welches t schließt die Schargerade mit der y-Achse einen Winkel von 30° ein?

41. Die beiden Achsenschnittpunkte jeder Schargeraden haben voneinander den Abstand 10 LE.

Bestimme die Gleichungen aller Geraden. Zeichne eine dieser Geraden.

42. Gegeben sind die Punkte $A\left(-4 \,\middle|\, -3\right);\ B\left(4 \,\middle|\, -3\right);\ C\left(x \,\middle|\, \sqrt{25 - x^2}\right)$

Die beiden festen Punkte A, B und der variable (von x abhängige) Punkt C bestimmen ein Dreieck. Ermittle den Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB$ bei C.

Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

43. Gegeben ist die Scharfunktion $f_t(x) = tx + 2\sqrt{t^2+1};\quad t \in \mathbb{R};\quad D = \mathbb{R}$

a) Für welches t ist der Graph parallel zur Winkelhalbierenden des 1.Quadranten?

b) Für welches t ist der Graph senkrecht zu einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 350$?

c) Welche Graphen der Schar schließen mit der x-Achse einen Winkel von 60° ein?

d) Bei welchen t-Werten sind die Nullstellen vom Ursprung $2\sqrt{2}$ entfernt?

e) Welche Bereiche der x-Achse sind keine Nullstellen von Schargeraden?

f) Bestimme die Entfernung d, die die beiden Achsenschnittpunkte der Geraden zum Parameterwert $t = 5$ haben.

g) Bestimme die Entfernung der Achsenschnittpunkte einer Schargeraden allgemein.

h) Für welches t beträgt die Entfernung der Achsenschnittpunkte genau 4 LE?

i) Zeichne die zu $t \in \{0; \pm 0{,}2; \pm 0{,}5; \pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ gehörenden Graphen.

Gymnasium / Realschule

Quadratische Funktionen

Klassen 9 - 11

Parabelgleichung ermitteln

1. Ermittle die Gleichung der nach oben geöffneten Normalparabel, die durch die Punkte A(-4|2) und B(1|-3) verläuft.

2. Eine nach oben geöffnete Parabel p liegt symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch die Punkte P(-4|6) und Q(2|3). Ermittle ihre Funktionsgleichung.

3. Die Gleichung einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel S(3|5) und die Formvariable b = 2. Ermittle die Koeffizienten a und c.

4. Eine Parabel mit dem Scheitel S(-2|9) enthält den Punkt P(-7|1). Bestimme die Funktionsgleichung.

5. Eine Parabel, deren Scheitelpunkt den x-Wert 1 hat, soll durch die Punkte A(-1|0) und B(2|-1,5) gehen. Stelle die Gleichung dieser Parabel auf.

6. Stelle die Gleichung der quadratischen Funktion auf, deren Graph durch die Punkte P(0|-1), Q(2|-1), R(-2|2) verläuft.

7. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion so, daß deren Graph durch die Punkte A(-2,5|0), B(-0,5|8) und C(1,5|0) verläuft.

8. Bestimme die Gleichung einer quadratischen Funktion, bei der ihr Scheitel S(3,5|-$\sqrt{2}$) und der Parabelpunkt P(-1|$\sqrt{3}$) gegeben sind.

9. Eine Parabel besitzt die Nullstellen N_1(-17|0) und N_2(31|0). Der Scheitel liegt auf der Geraden y = 5. Bestimme die Parabelgleichung.

10. Eine Parabel mit der Symmetrieachse x = -5 enthält den Punkt P(-7|-1) und Q(-2|3). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel ?

11. Eine Parabel der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt den Scheitelpunkt S(-3|4) und eine Nullstelle bei $x_0 = -1$.

a) Wo liegt die zweite Nullstelle der Parabel (Überlegung) ?

b) Bestimme die Koeffizienten a, b und c der Parabelgleichung.

12. Bestimme a und b so, daß die zugehörige Parabel $y = ax^2 + b$

a) den Punkt S(?|4) als Scheitel hat und durch den Punkt P(3|-2) läuft;

b) ihren Scheitel auf der Geraden y = 0,5x - 4 hat und die x-Achse bei x = 4 schneidet;

Scheitelform / Scheitelpunkt ermitteln und Gleichung der Symmetrieachse

13. Bestimme den Scheitelpunkt S und gib an, ob der Scheitel jeweils der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel ist. Wie lautet jeweils die Gleichung der Parabelachse ? $x \in \mathbb{R}$

a) $y = 2x^2 + 8x$

b) $y = -0,5x^2 + 2x + 1$

c) $y = -0,25x^2 - 0,2$

d) $y = -\sqrt{2}\,x^2 - 2x + 1$

e) $0 = 3x^2 + 4y - \frac{x}{7}$

Zerlegung in Linearfaktoren

14. Zerlege, wenn möglich, in Linearfaktoren:

a) $y = x^2 - x - 6$

b) $y = 3x^2 - 6x - \frac{7}{3}$

c) $y = 3x^2 - 1,5x + 1$

d) $y = 0,5x^2 - 3x + 4,5$

Gespiegelte Parabel

15. Die Parabel $y = 2x^2 - 6x + 4$ wird

a) an der x-Achse

b) an der y-Achse

c) an der Geraden $y = 1$

d) an der Geraden $x = 1$

e) an der Geraden $y = x$

gespiegelt. Gib die Gleichung der gespiegelten Parabel an.

Nullstellen (Lösungsmenge) ermitteln

16. Berechne die Nullstelle(n) folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3 - \frac{x^2}{3}$

b) $f(x) = (x - 1)^2 - (3x - 0,5)^2$

c) $f(x) = (x - 0,75)\,(x - 0,75) + (x - 0,75)\,(x - 0,5)$

d) $f(x) = 8 - x - 3x^2$

Vermischte Aufgaben

17. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Bestimme die Menge aller x-Werte, für die bei der Funktion f jeweils folgendes erfüllt ist:

a) $y = 2$

b) $y \geq -3$

18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 - 6x - 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$

Bestimme diejenigen Werte für a, für die die Funktion genau zwei Nullstellen besitzt.

19. Von einer Normalparabel sind die Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$ gegeben.
Weiterhin ist die Geradenschar $g_t(x) = 2x + t$ gegeben.

a) Bestimme den Funktionsterm $f(x)$ der Parabel

b) Bestimme die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g_t(x)$ in Abhängigkeit vom Parameter t.

20. Von einer Quadratischen Funktionenschar $f_q(x)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ sind der Scheitel $(1|q)$ mit $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie der Punkt $A(3|0)$ $(A \in f_q(x))$ gegeben.

a) Bestimme den Funktionsterm der Schar

b) Die Funktionenschar besitzt gemeinsame Punkte. Gib einen dieser Punkte an.

c) Bestimme die Nullstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit vom Parameter q.

Die Betragsfunktion (affine Funktion)

Klasse 11

Stelle folgende Funktionen ohne Betragsstriche dar und zeichne den Graph der Funktionen für $x \in [-4; 4]$:

1. $f(x) = |x|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = |x - 1|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

3. $f(x) = ||x| - 1|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

4. $f(x) = 0,5x + |x|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \frac{|x|}{x}(x+1)$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. $f(x) = \frac{x-|x|}{x}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7. $f(x) = 0,5|2x - 2|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

8. $f(x) = |x + 1|+|x - 2|$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Nullstellen von Funktionen

Klassen 9 - 11

Bestimme die Nullstelle(n) folgender Funktionen:

1. $f(x) = (x - 4)\,x$ mit $x \in \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ mit $x \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = \sqrt{6x - x^2 - 5}$ mit $x \in [1;\ 5]$

4. $f(x) = 2^x - 8$ mit $x \in \mathbb{R}$

5. $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ mit $x \in \mathbb{R}$

6. $f(x) = x^2 - 9x$ mit $x \in \mathbb{R}$

7. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 25}{2x - 7}}$ mit $x \in [5;\ +\infty]$

8. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit:

9. $f(x) = (x + 2)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

10. $f(x) = (x^2 + 2)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

11. $f(x) = x^2\,(x - 2)(x + 2)^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$ mit $x \in \mathbb{R}$

13. $f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x$ mit $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = \frac{1}{16}(5x^4 - 28x^3 + 36x^2)$ mit $x \in \mathbb{R}$

15. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 17x - 21$ mit $x \in \mathbb{R}$ (eine Nullstelle durch Probieren ermitteln)

16. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 50x$ mit $x \in \mathbb{R}$ (eine Nullstelle durch Probieren ermitteln)

Gymnasium

Rationale Funktionen

Klasse 11

Bestimme von folgenden Funktionen die maximale Definitionsmenge, die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen (Pole), sowie Definitionslücken und Symmetrieeigenschaften (falls vorhanden).
Skizziere den wesentlichen Verlauf der Graphen.

1) $x \mapsto \frac{x-2}{3-x}$

2) $x \mapsto \frac{x-2}{x+2}$

3) $x \mapsto \frac{1}{x-3}$

4) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

5) $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

6) $x \mapsto \frac{2x^2}{x-1}$

7) $x \mapsto \frac{(x-3)(x+2)^2}{x+2}$

8) $x \mapsto \frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$

9) $x \mapsto \frac{(x+4)(x-3)}{x^2(x+5)}$

10) $x \mapsto \frac{x^2-9}{x^4-4x^2}$

11) $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$

12) $x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$

13) $x \mapsto \frac{x+1}{x^2}$

14) $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$

15) $x \mapsto \frac{x-x^2}{x^2-1}$

16) $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-2x}$

17) $x \mapsto \frac{x^3+x}{x}$

18) $x \mapsto \frac{3x^3}{(x+1)^4}$

19) $x \mapsto \frac{x^3-x}{x^2+4}$

20) $x \mapsto x-\frac{3}{x-2}$

21) $x \mapsto \frac{10}{x^2-2x+3}$

22) $x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

23) $x \mapsto \frac{x^2-x-6}{x^3+x^2-2x}$

24) $x \mapsto \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

25) $x \mapsto \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3-6x^2-x+6}$

26) $x \mapsto \frac{x^3-x^2-2x}{x+2}$

27) $x \mapsto \frac{x^3+x^2-2x}{x^3-x^2-4x+4}$

28) $x \mapsto \frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}$

29) $x \mapsto \frac{x^4+2x^3-13x^2+10x}{2x^3+x^2-18x-9}$

Gymnasium

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

Bestimme mit Hilfe der Grenzwertsätze die folgenden Grenzwerte; es liegt jeweils der Definitionsbereich des Terms zugrunde:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 2{,}5 =$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} =$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} =$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) =$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2} =$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-x^{-2}\right) =$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^3} =$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(-\dfrac{2\pi}{x^5}\right) =$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} =$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x^2}\right) =$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{4x-5} =$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x}{7x^2-3x+1} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3} =$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\frac{1}{x^5}\right)\left(7-\frac{6}{x^3}\right) =$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+10x}{x^2+5} =$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2-4x+1}{x^3+3x+4} =$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\cdot\dfrac{6x^2-7}{x^2+4}\right) =$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{1+x^3}\right) =$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\dfrac{x-1}{1-2x}\right) =$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2^x}{2^x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2^x}{2^x} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} 3{,}8^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3{,}8^x =$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{0{,}6^x - 1}{1-0{,}6}\cdot 8 =$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} =$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{23}}\right) =$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} =$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4 - \frac{25}{x^2}} =$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{3x - \sqrt{x}} =$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} =$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{1 + x^2}} =$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2 + 25} + 3x}{1 - 2x} =$

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) =$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x + 1}{7x^2 + x + 2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}\right) =$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\right) =$

37. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x - 1}{5x^2 + 1} \cdot \sin 2x\right) =$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1 + \sin x}\right) =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

39. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin^2 x + \cos^2 x \right) =$

40. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} =$

41. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} =$

42. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^2} =$

43. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) =$

44. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{2^x} =$

45. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x + \sin x} =$

46. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 + 2\sin x}{x} =$

47. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x + \sin x} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

48. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - \cos x} =$

49. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x + \cos x} =$

50. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{\cos x - x} =$

51. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 2x - 3(\sin x)^2}{3x - 5x^2} =$

52. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{5x^2 + 1} \cdot \sqrt{3 + \sin 2x} =$

53. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + \cos x}{3x} =$

54. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - |x|}{2|x| + 3} =$

Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

Klasse 11

Nicht existierende Grenzwerte (unbestimmte Divergenz)

60. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x =$

61. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x =$

62. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin 2x =$

63. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (3 \cdot \sin^3 x) =$

64. $\lim\limits_{x \to \infty} (x \cdot \sin x) =$

65. $\lim\limits_{x \to \infty} (2^x \cdot \sin x) =$

66. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \cos x\right) =$

67. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2 + \sin x} =$

68. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2 + \cos x} =$

69. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{3 - \cos x} =$

70. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{4 - 2\cos 4x} =$

71. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sin x + \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) =$

Grenzwerte f'(x) (h-Methode); Ableitung f'(a)

Bestimme f'(x) durch Grenzwertrechnung nach der „h-Methode“:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1. $f(x) = 2x$
2. $f(x) = -3x$
3. $f(x) = ax$
4. $f(x) = mx + t$
5. $f(x) = 5x^2$
6. $f(x) = -0{,}5x^2$
7. $f(x) = x^2 + 1$
8. $f(x) = ax^2 + b$
9. $f(x) = x^2 + x$
10. $f(x) = 4x^2 - 2x$
11. $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$
12. $f(x) = ax^2 + bx + c$
13. $f(x) = 2x^3$
14. $f(x) = -x^3$
15. $f(x) = x^3 + 5$
16. $f(x) = x^3 + x - 2$
17. $f(x) = 2\sqrt{x}$
18. $f(x) = -\frac{1}{2x}$
19. $f(x) = \frac{a}{x}$
20. $f(x) = 2\sin x + 1$

Berechne f'(0):

21. $f(x) = -3x + 8$
22. $f(x) = 0{,}5x^2 - 10x - 25$
23. $f(x) = -2\sin x + 3\cos x$

Berechne f'(1):

24. $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$
25. $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
26. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x}$

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

1. Berechne die Scheitelkoordinaten und skizziere jeweils die Parabel mit der Gleichung

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
b) $f(x) = - x^2 + 3x$
c) $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 2$
d) $f(x) = - 0{,}5x^2 + 3x - 7$

2. Zeige: Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat die Scheitelkoordinaten

$$x_S = -\frac{b}{2a}; \qquad y_S = c - \frac{b^2}{4a} \qquad (a \neq 0)$$

3. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt P des Graphen von

a) $f:\ y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2;\ \ x \in \mathbb{R},\ \ P(0/?)$

b) $f:\ y = -\frac{1}{2}x^{-1};\ \ x \in \mathbb{R}/\{0\},\ \ P(-1/?)$

c) $f:\ y = \sqrt{2x};\ \ x \in \mathbb{R}^+,\ \ P(2/?)$

4. a) Wie lautet die Gleichung der Normalen im Punkt $P(2/?)$ des Graphen der Funktion $f:\ y = 0{,}1x^3$?

b) Gegeben ist die Funktion $f:\ y = x^2;\ \ x \in \mathbb{R}$. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das die Normale im Punkt $P(1/?)$ des Graphen mit beiden Koordinatenachsen einschließt ? 1 LE = 1 cm

5. Zeichne den Graphen der Funktion $f:\ y = \frac{1}{2}x + \cos x$ in $[0;\ 2\pi]$!

In welchen Kurvenpunkten ergeben sich waagerechte Tangenten ?
In welchen Punkten ist der Graph relativ zur Umgebung am steilsten ? Die Antworten sind mit Hilfe der Ableitungsfunktion f', deren Graph ebenfalls gezeichnet werden soll, zu begründen.

6. In welchen Punkten des Graphen von $f:\ y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3};\ \ D_f = \mathbb{R}$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein ?
Wie kann man ohne Zeichnung erkennen, dass es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?

7. Man bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ y = x^3 - 2x + 1$ durch den Kurvenpunkt $P(1/?)$. Hat die Tangente mit G_f noch einen Schnittpunkt gemeinsam ? Entscheide die Frage durch probierendes Einsetzen ! Zeichne sodann Graph und Tangente in einem geeigneten Intervall, das den Ursprung enthält !

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

8. a) Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y = 2x - 3$ und $y = x^2 + 2x - 7$?
Wie lauten die Tangentengleichungen in den Schnittpunkten ?

b) Welchen Punkt haben die Graphen von $f: \; y = \cos x + \sin x$ und $g: \; y = \sin x - 2\cos x$ in $[0; \; \pi]$ gemeinsam ?
Man berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt !

9. Durch die Gleichung $y = ax^2 - 3x + \frac{1}{a}; \quad x \in \mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \neq 0$ ist eine Parabelschar gegeben. Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes für die Scheitel aller Parabeln ?

10. Zur Schar der Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k$ mit $k \in \mathbb{R}$ als Scharparameter gehört eine Schar von Graphen G_{f_k}. Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte B_k, in denen die Graphen die Steigung 2 haben ?
Zeige, dass diese Kurve zur Graphenschar G_{f_k} gehört !

11. Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_k(x) = x + \frac{k}{x}$ mit $k > 0$ als Scharparameter und $D_{f_k} = \mathbb{R} / \{0\}$.

a) Ermittle den Ableitungsterm $f_k'(x)$ durch Grenzwertrechnung !

b) Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte der Graphenschar mit waagerechter Tangente ?

12. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten des Terms $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ genügen, damit der Graph der Funktion $f(x), \; D_f = \mathbb{R}$ keine waagerechten Tangenten hat ?

13. Zeige, dass sich die Graphen der Funktionen

$f: \; y = x^2 + 2x + 1; \quad x \in \mathbb{R}$ und $g: \; y = ax^2 - 0{,}5x + 1; \quad x \in \mathbb{R}$

im Punkt $S(0;?)$ für jeden Wert a orthogonal (rechtwinklig) schneiden.
Deute insbesondere den Fall $a = 0$!

14. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a: \; y = ax^2 - 2x + 1$, wobei der Scharparameter a eine beliebige reelle Zahl vertritt.

a) Für welche Belegung von a geht die Tangente in $P(1;?) \in G_{f_a}$ durch den Ursprung des Koordinatensystems ?

b) Wie lautet die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a ?

Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

15. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k:\ f_k(x) = x^2 - kx$ mit $x \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k, $k \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne G_0 und G_2 mit 1 LE = 2 cm !

b) Zeige rechnerisch, dass sich alle Graphen G_k in genau einem Punkt schneiden !

c) Berechne allgemein die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen G_k mit dem Graphen G_p der Funktion $p:\ y = \frac{1}{2} - x^2;\quad x \in \mathbb{R}$ und trage G_p in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein !

d) Zeige, dass alle Graphen G_k den Graphen G_p rechtwinklig schneiden !

16. Zu untersuchen ist die Schar von Funktionen $f_k:\ f_k(x) = x^2 - k|x|$ mit $k \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k.

a) Bestimme die Nullstellen von f_k (Fallunterscheidung !) und zeichne die zu k = 1 und k = -1 gehörigen Graphen G_1 und G_{-1} !   1 LE = 2 cm

b) Wie muss k gewählt werden, damit der Graph G_k an der Stelle $x_0 = 0$ einen Knick um 90° erfährt ?

c) Bestimme rechnerisch in Abhängigkeit von k die Anzahl der Punkte, die der Graph G_k mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten gemeinsam hat !

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

Überblick

Die vorliegenden Extremwertaufgaben sind Textaufgaben, meist mit Zeichnungen versehen, bei denen die Frage gestellt wird, unter welchen Bedingungen ein Wert (z.B. Abstand, Länge, Fläche, Volumen) am größten oder am kleinsten ist.
Um diese Werte berechnen zu können, ist zum gegebenen Sachverhalt eine Funktionsgleichung (Zielfunktion) aufzustellen, in der alle notwendigen Größen sinnvoll eingebracht sind.

Wenn in der Aufgabenstellung also nach einer größten Fläche gefragt wird, muss mit der Zielfunktion eben diese Fläche berechnet werden.

Für die Lösungen der nachfolgenden Aufgaben wird keine höhere Mathematik, also Differenzialrechnung (Ableitung) herangezogen. Genau genommen, benötigt man noch nicht einmal einen Taschenrechner, vorausgesetzt, man beherrscht die Grundrechenarten im Kopf oder notfalls mit einem Stift und Zettel.

Es geht bei den meisten der folgenden Aufgaben darum, den Scheitel(punkt) einer quadratischen Gleichung zu bestimmen und zu erkennen bzw. abzulesen, ob es sich beim Extremwert um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

Kurzanleitung zur Lösung von Extremwertaufgaben

a) Falls möglich, sollte eine Skizze des Sachverhaltes mit allen Konstanten und Variablen angelegt bzw. erweitert werden.

b) Zielfunktion ermitteln, d.h. eine mathematische Gleichung aufstellen mit der Größe, die einen Extremwert annehmen soll und den Variablen bzw. Konstanten.

c) Nebenbedingung(en) aufstellen, d.h. eine Gleichung mit allen Variablen.

d) Die Gleichung der Nebenbedingung(en) so nach einer Variablen umstellen, so dass sie in die Zielfunktion eingesetzt werden kann.

e) Durch Umformungen der Zielfunktion den Extremwert gewinnen (Zahl, Länge, Fläche, Volumen)

Notwendige mathematische Grundkenntnisse zur Lösung der folgenden Aufgaben:

- ► Flächenformeln für Dreiecke, Quadrat, Rechteck,
- ► Satz des Pythagoras,
- ► Lösen quadratischer Gleichungen,
- ► quadratische Ergänzung (Parabelfunktion) und Scheitelwert,
- ► Geradengleichungen aufstellen,
- ► Vierstreckensatz / Strahlensatz,
- ► Substitution und trigonometrische Grundkenntnisse.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

Neben den hier vorgestellten Extremwertproblemen gibt es noch viele weitere Aufgabentypen aus den Gebieten Technik, Physik, Wirtschaft, usw.

Weiteres Übungsmaterial auf meiner Webseite www.mathe-physik-aufgaben.de:

RM_AU003 Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader); funktionale Abhängigkeiten

RM_AU007 Raumgeometrie – gerade Pyramide; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU011 Raumgeometrie – schiefe Pyramide; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU015 Raumgeometrie – Zylinder, Kegel; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU020 Raumgeometrie – Zylinder, Kegel, Kugel; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU027 Raumgeometrie – ebene Schnitte; funktionale Abhängigkeiten

RM_AU044 Trigonometrie – Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Extremwertaufgaben

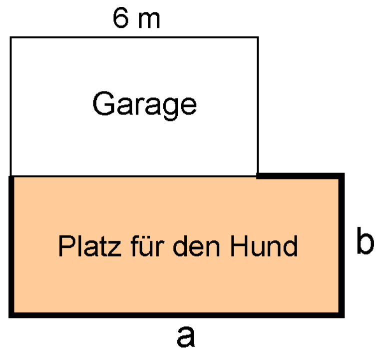
Klassen 8 bis 10

1. Aus einem Draht der Länge 60 cm soll ein Rechteck gebogen werden, das eine Fläche von maximalem Inhalt umrandet. Bestimme die Fläche des größten Rechtecks. Wie sind seine Länge und Breite zu wählen?

---

2. Franz möchte mit 34 m Maschendraht einen rechteckigen Platz für seinen Hund einzäunen. Die eingezäunte Fläche grenzt an eine 6 m lange Garage (siehe Skizze).

Stelle einen Term für den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit einer Seitenlänge (a oder b) auf, und bestimme die Maße des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.



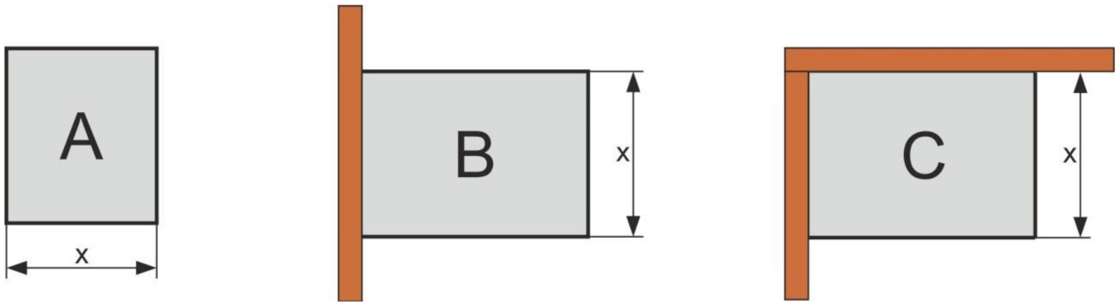
3.0 Emma hat im Baumarkt 12 m Haustierzaun gekauft, um für ihre Schildkröten im Garten ein Freigehege abzugrenzen. Den Tieren soll eine möglichst große rechteckige Fläche zur Verfügung stehen.

Emma hat drei Möglichkeiten zur Auswahl, um das Freigehege anzulegen:

a) Das Gehege ist völlig freistehend.

b) Eine Seite des Geheges grenzt an eine Mauer.

c) Zwei Seiten grenzen an eine Mauer



Hinweis: Dort wo das Gehege an eine Mauer angrenzt ist kein Zaun notwendig!

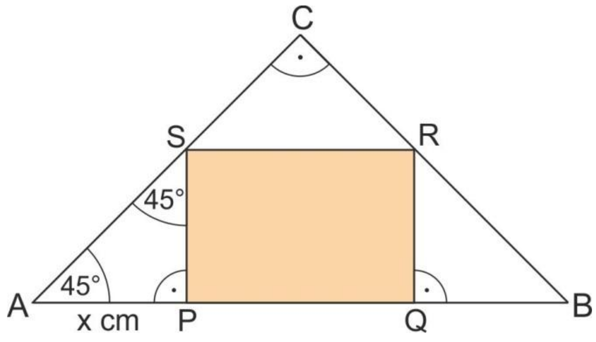
3.1 Stelle für die Varianten A, B und C jeweils einen Term auf, der die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt.

3.2 Bestimme für jede der drei Varianten den maximalen Flächeninhalt und gib dabei die Belegung für x an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

4. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig mit der Basis $\overline{AB} = 18\text{ cm}$.
Es werden Rechtecke PQRS einbeschrieben mit $\overline{PQ} \in \overline{AB}$ (siehe Abb.)
Die Strecke $\overline{AP}$ ist x cm lang.

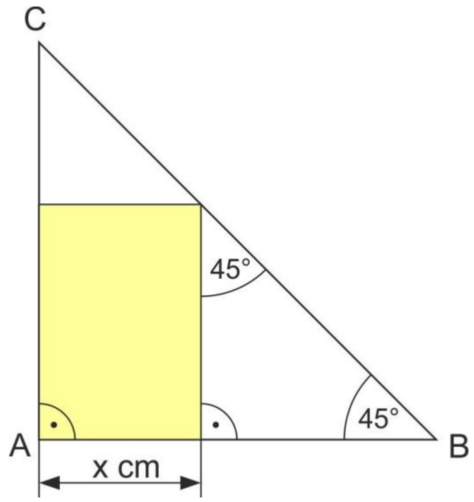


a) Gib einen Term an, der die Fläche der Rechtecke in Abhängigkeit von x beschreibt.

b) Ermittle für das flächengrößte Rechteck den Wert für x.

---

5. Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\text{ cm}$.
Diesem Dreieck lassen sich beliebig viele Rechtecke einbeschreiben (siehe Skizze).



a) Bestimme den Flächeninhalt der Rechtecke in Abhängigkeit von x.

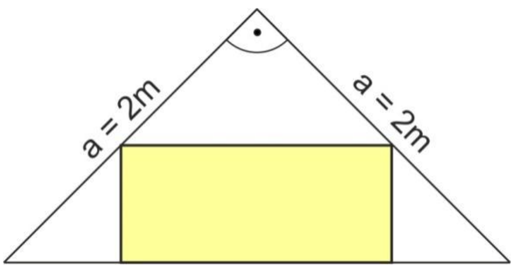
b) Bestimme den maximalen Flächeninhalt und den zugehörigen x-Wert.

---

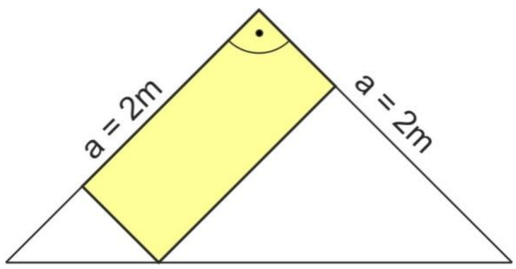
6. Aus einem Blech, das die Form eines halben Quadrates mit der Seitenlänge $a = 2\text{ m}$ hat, soll ein möglichst großes Rechteck herausgeschnitten werden.

Es stehen zwei Varianten zur Auswahl. Berechne jeweils den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks.

a)



b)

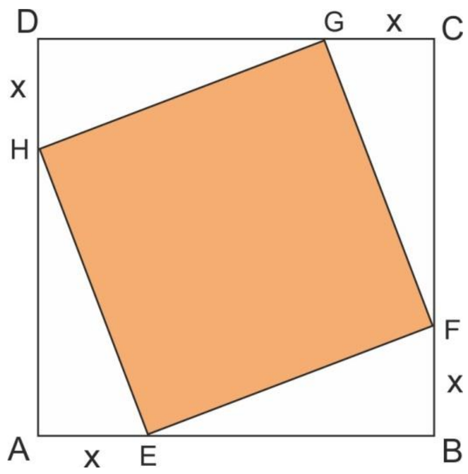


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

7. Gegeben ist das Quadrat ABCD mit dem Flächeninhalt $1\,m^2$. Von jedem Eckpunkt aus wird für jede Seite entgegen dem Uhrzeigersinn (linksherum) die Strecke x abgetragen. Dadurch entstehen neue Quadrate $E_nF_nG_nH_n$.

Es gilt: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$ (vgl. Skizze).

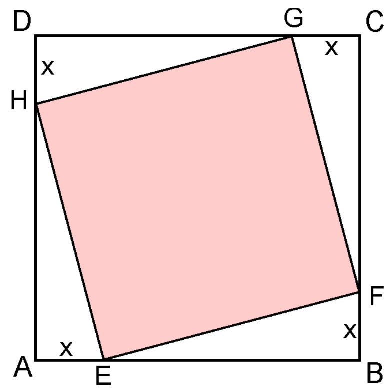


a) Bestimme den Flächeninhalt der neuen Quadrate $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von x.
Welche Werte sind für x sinnvoll?

b) Berechne die Seitenlänge des kleinsten Quadrates und gib seinen Flächeninhalt an.

---

8. Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit $\overline{AB} = 10$.
Von den vier Ecken aus werden jeweils Strecken x abgetragen, sodass neue Quadrate EFGH entstehen.
Es gilt: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$



a) Bestimme den Flächeninhalt des Quadrates EFGH in Abhängigkeit von x.

b) Berechne die Seite des kleinsten Quadrates.
Gib den minimalsten Flächeninhalt an.

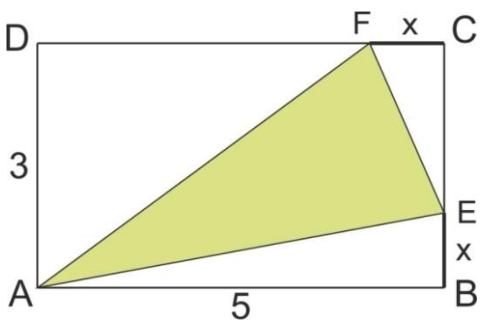
---

9. In das Rechteck ABCD mit den Seitenlängen 3 und 5 ist ein Dreieck AEF einbeschrieben.

Stelle einen Term für den Flächeninhalt des Dreiecks AEF in Abhängigkeit von x auf (vgl. nebenstehende Skizze).

Für welches x ist der Flächeninhalt minimal?

Gib diesen minimalen Flächeninhalt an.



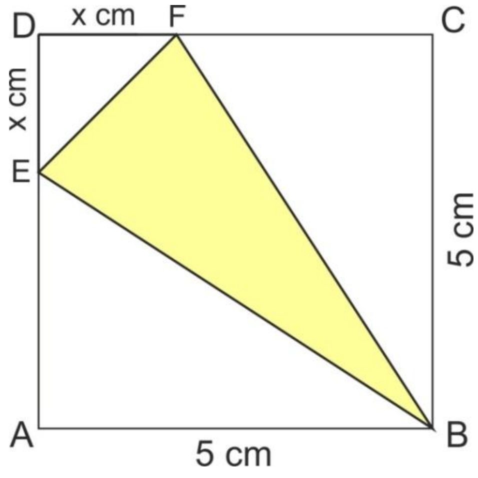
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

10. Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlänge von 5 cm. Trägt man von der Ecke D jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte E und F (vgl. nebenstehende Skizze).

a) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks BEF in Abhängigkeit von x.

b) Berechne, für welchen x-Wert das Dreieck den größten Flächeninhalt hat und gib diesen Wert an.



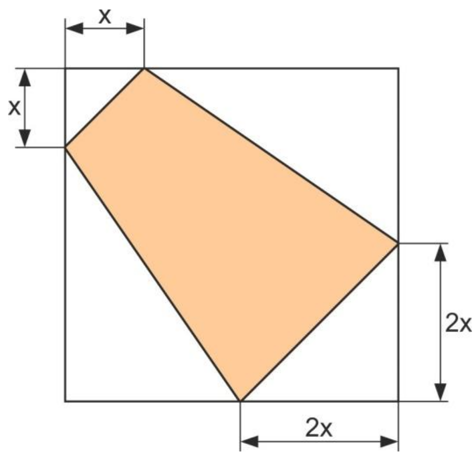
---

11. Einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 144 cm^2 werden Trapeze einbeschrieben.
(Trapez einbeschreiben heißt, dass alle Eckpunkte des Trapezes genau auf Quadratseiten liegen.)
zulässiges Intervall für x: $0 < x \leq 6$

a) Berechne die Flächeninhalte der Trapeze als Funktion von x.

b) Unter den Trapezen gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. Begründe dies.

c) Berechne den Wert für x, der das Trapez mit maximalem Inhalt liefert.

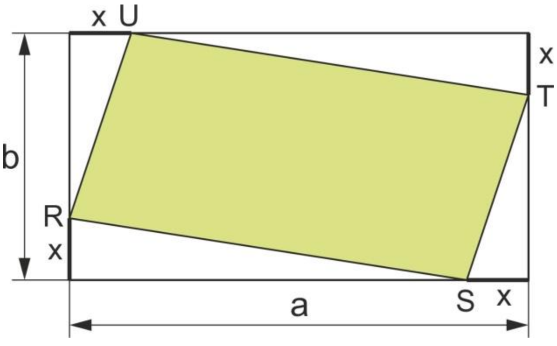


---

12. Auf den 4 Seiten eines Rechtecks mit den Längen $a = 8$ und $b = 4$ wird die Strecke x abgetragen (siehe nebenstehende Skizze).

a) Stelle einen Term auf für den Flächeninhalt des Parallelogramms RSTU in Abhängigkeit von x.

b) Für welches x ist der Flächeninhalt des Parallelogramms am kleinsten? Gib diesen Inhalt an.

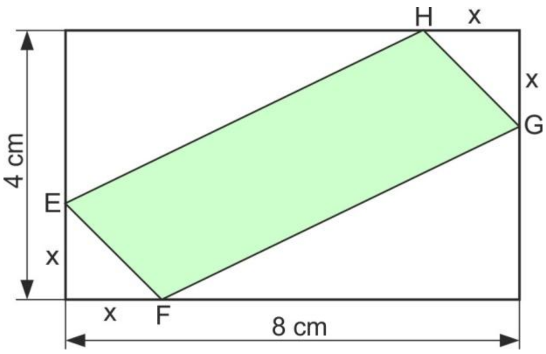


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

13. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $8\,\text{cm}$ und $4\,\text{cm}$. Trägt man in zwei gegenüberliegenden Ecken jeweils die Strecken x ab, so erhält man das Parallelogramm EFGH (siehe Zeichnung).

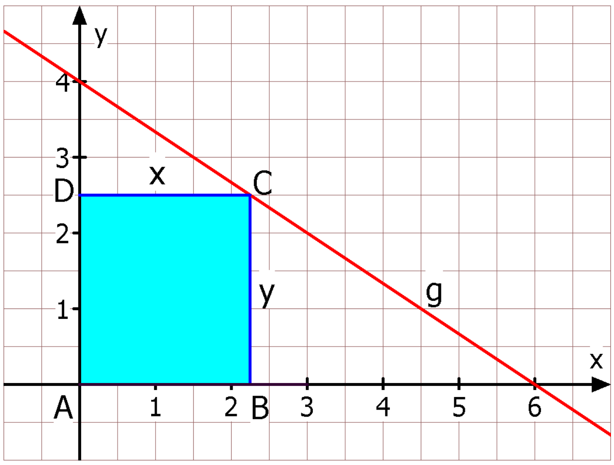
Für welchen x-Wert hat das Parallelogramm EFGH seinen größten Flächeninhalt?



---

14. Die Gerade g schneidet die y-Achse an der Stelle $(0\,|\,4)$ und die x-Achse an der Stelle $(6\,|\,0)$. Der Punkt C liegt auf der Geraden g und ist variabel.

Zeichnet man die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt C, so entsteht das Rechteck ABCD (siehe nebenstehende Zeichnung).



a) Zeige, dass für den Flächeninhalt des Rechtecks gilt:

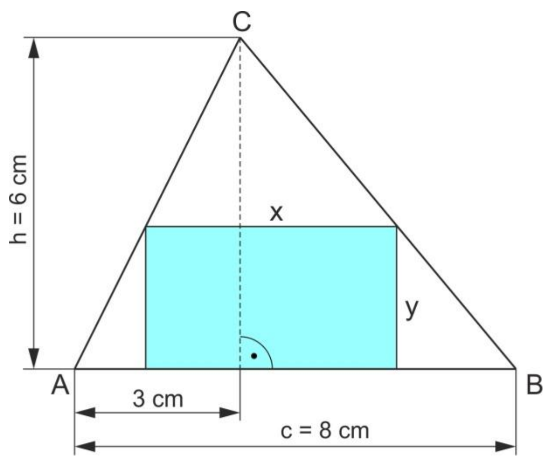
$$A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x\,,\quad \text{für} \quad 0 < x < 6$$

b) Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD maximal wird. Gib diesen Maximalwert an.

---

15. In das Dreieck ABC mit der Grundseite $c = 8\,\text{cm}$ und der Höhe $h = 6\,\text{cm}$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden.
Eine der Rechteckseiten liegt dabei auf der Grundseite c des Dreiecks (vgl. Skizze).

Wie lang sind die Seiten x und y des Rechtecks?



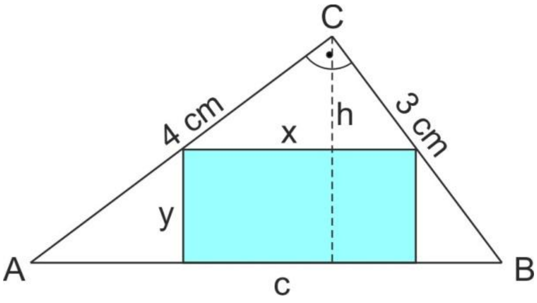
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

16. Einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$ wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine seiner Seiten auf der Hypotenuse c liegt.

a) Unter den Rechtecken gibt es eines mit maximaler Fläche. Berechne seine Seitenlängen x und y.

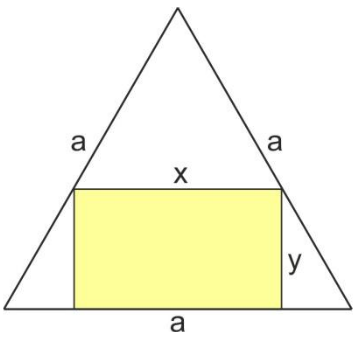
b) Je nach x-Wert nimmt das Rechteck eine andere Form an; auch der Sonderfall eines Quadrats kann auftreten. Berechne x so, dass dieser Sonderfall eintritt; d.h. $y = x$.



---

17. Einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge $a = 10\,\text{cm}$) wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine der Rechteckseiten auf einer Dreiecksseite liegt (vgl. Skizze).

Wie lang sind die Seiten x und y des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt?



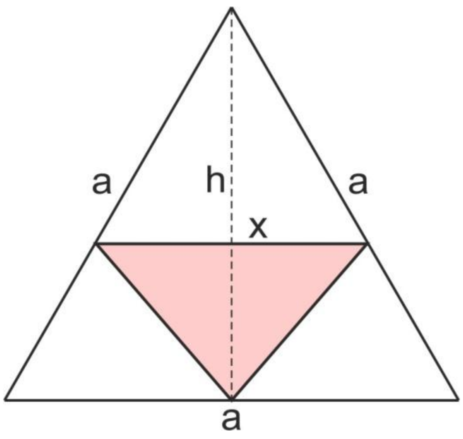
---

18. Einem gleichseitigen Dreieck mit dem Flächeninhalt $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ werden gleichschenklige Dreiecke einbeschrieben (vgl. Skizze).

a) Stelle für die Flächeninhalte der einbeschriebenen Dreiecke einen Term in Abhängigkeit von der Grundlinie x auf.

b) Warum besitzt A(x) einen Extremwert?

c) Berechne die Belegung von x für den Extremwert. Wie groß ist die zugehörige einbeschriebene Dreiecksfläche?



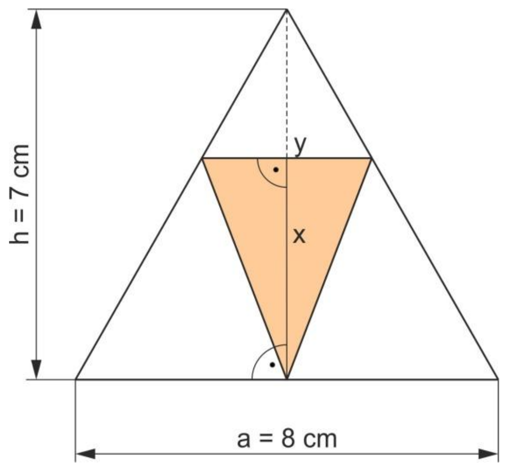
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

19. Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie $a = 8$ cm und der Höhe $h = 7$ cm wird ein ebenfalls gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben, dessen Spitze in der Mitte der Grundlinie a liegt.
Das einbeschriebene Dreieck hat die Grundlinie y und die Höhe x.

a) Bestimme den Flächeninhalt aller einbeschriebenen Dreiecke in Abhängigkeit von x

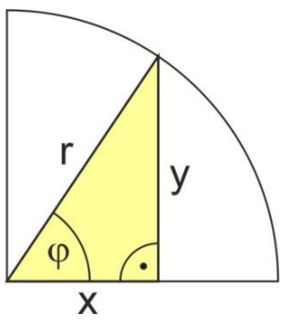
b) Wie groß ist die Grundlinie y des einbeschriebenen Dreiecks, das den größten Flächeninhalt hat?



---

20. Einem Viertelkreis mit dem gegebenen Radius r wird ein Dreieck einbeschrieben. Je nach Winkel φ besitzt das Dreieck unterschiedliche Flächeninhalte (siehe Skizze rechts).

Für welchen Winkel φ hat das Dreieck seinen größten Inhalt?



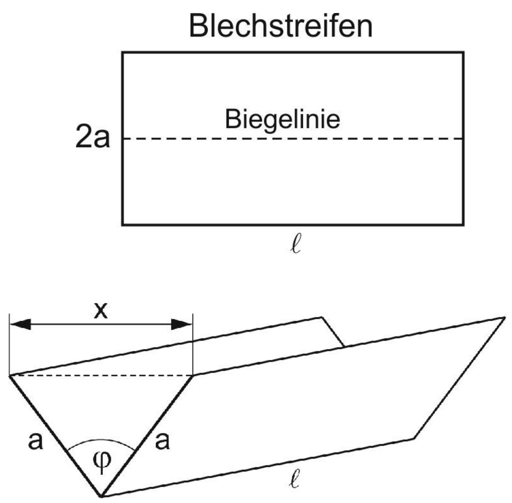
---

21. Aus einem Blechstreifen der Breite 2a und der Länge ℓ soll eine V-förmige Wasserrinne gebogen werden, die maximales Volumen aufnehmen kann.

a) Welcher Biegewinkel φ ist zu wählen?

b) Welche maximale Querschnittsfläche (Dreiecksfläche) erhält man?

c) Wie breit (Maß x) ist die Rinne dann am oberen Rand?

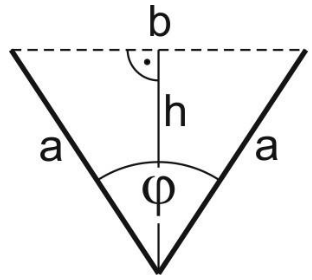


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

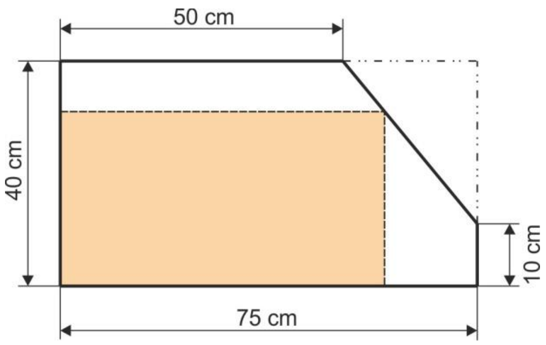
22. Eine V-förmige Wasserrinne soll aus einem Blech der Breite $2a = 40$ cm nach nebenstehender Skizze angefertigt werden (siehe auch Aufg. 21).

Wie groß müssen die Breite b und die Höhe h werden, damit möglichst viel Wasser transportiert werden kann? Die Fläche des Dreiecks soll also ein Maximum werden.



---

23. Von einer rechteckigen Platte ist eine Ecke abgebrochen. Aus der nun fünfeckigen Platte soll durch zwei Schnitte (parallel zu den Seiten des ursprünglichen Rechtecks) eine möglichst große rechteckige Platte herausgeschnitten werden
(siehe nebenstehende Skizze).



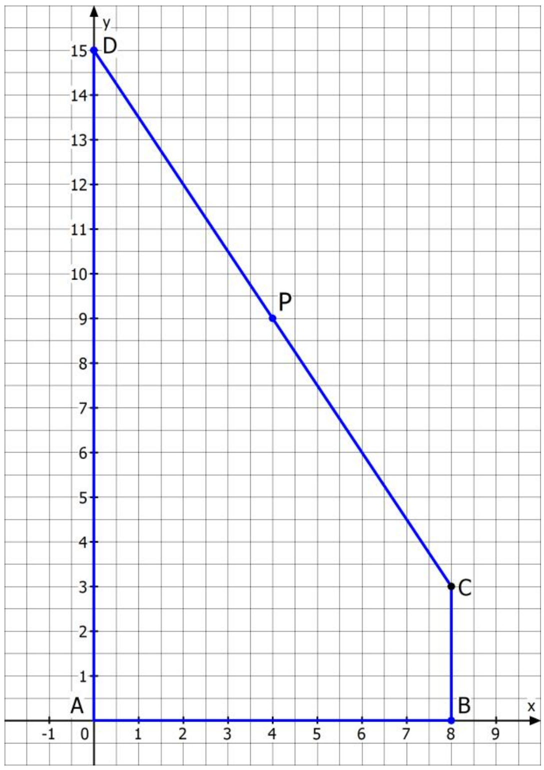
a) Bestimme die Abmessungen der herausgeschnittenen, rechteckigen Platte.

b) Um wie viel Prozent ist die fünfeckige Platte größer als die rechteckige Platte?

---

24. Gegeben ist das Trapez ABCD mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$ $(1\text{LE} = 1\text{cm})$.

Dem Trapez werden Rechtecke einbeschrieben. Die Seiten dieser Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Alle Punkte P auf [CD] sind Eckpunkte der einbeschriebenen Rechtecke. Ebenso ist der Punkt A Eckpunkt eines jeden Rechtecks.



a) Zeichne das einbeschriebene Rechteck mit dem Punkt $P(4|y)$ in das Trapez ein und bestimme seinen Flächeninhalt.

b) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $[CD]$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Begründe, dass sich der Flächeninhalt A mit der Gleichung $A(x) = x(-1{,}5x + 15)$ berechnen lässt.

c) Bestimme die Koordinaten von P für das einbeschriebene Rechteck mit dem größten Flächeninhalt. Gib seinen Inhalt an. Begründung!

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

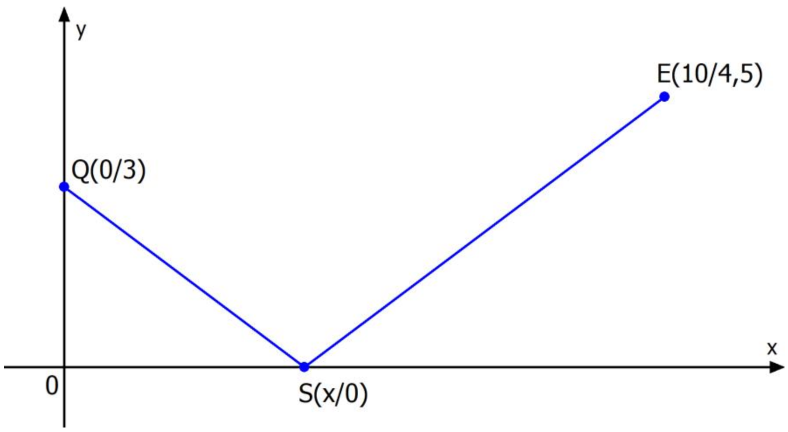
25. An welcher Stelle (Punkt Q_0) hat ein Punkt Q auf der Geraden $g:\ y = -2x + 4$ den kleinsten Abstand d_{min} zum Punkt $P(-3\,|\,-2{,}5)$? Bestimme diesen Abstand durch eine Rechnung. Fertige zunächst eine saubere Skizze an.

Welche Beziehung haben die Gerade g und die Gerade $\overline{PQ_0}$ zueinander?

---

26. Dargestellt ist der Strahlengang eines Laserstrahls von der Quelle Q über den Spiegelpunkt S auf der x-Achse bis zum Empfänger E.

Gesucht ist die x-Koordinate des Punktes S, für den kürzesten Weg von Q über S nach E.



Hinweis: Im Falle des kürzesten Weges gilt das Reflexionsgesetz.
(Der rechnerische Beweis erfolgt hier nicht.)

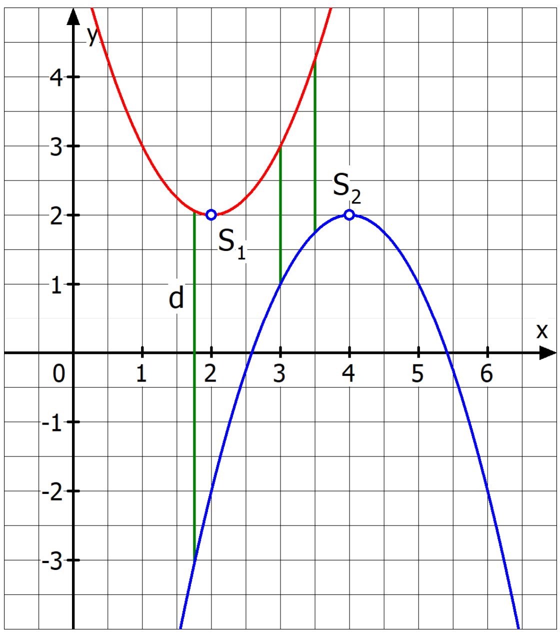
---

27. Die Graphen zweier Funktionen sind aus der Normalparabel durch Verschiebung bzw. Spiegelung an der x-Achse hervorgegangen. Die eine Parabel hat den Scheitel $S_1(2\,|\,2)$ und ist nach oben geöffnet, die zweite Parabel hat den Scheitel $S_2(4\,|\,2)$ und ist nach unten geöffnet.

a) Gib für beide Parabeln die Funktionsgleichung an.

b) Zwischen beiden Parabeln sind senkrechte Strecken d eingezeichnet.

Bestimme rechnerisch die kürzeste dieser Strecken und den zugehörigen x-Wert dieser Senkrechten.



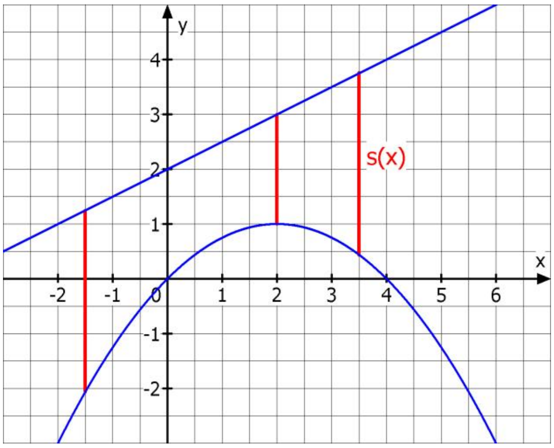
Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

28. Nebenstehendes Bild zeigt die Graphen einer Geraden und einer Parabel.
Die Parallelen zur y-Achse haben die Länge $s(x)$ und verlaufen zwischen der Parabel und der Geraden.

a) Gib die Funktionsgleichungen für die Parabel und für die Gerade an. Entnimm die benötigten Werte dem Koordinatensystem.

b) Bestimme s_{min}, die kürzeste unter allen diesen Strecken, und gib an, wo sie liegt.



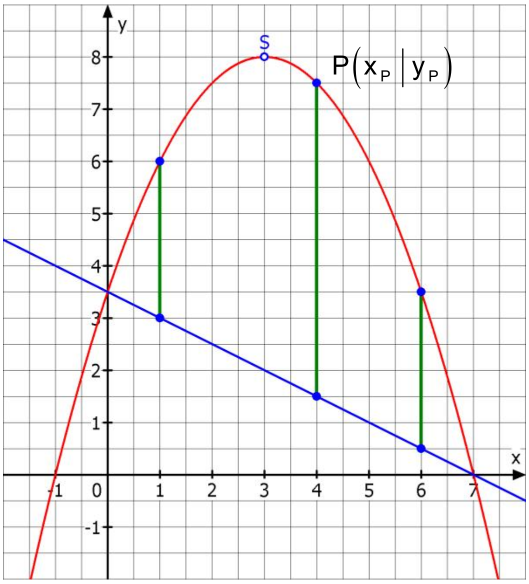
---

29. Das Bild rechts enthält den Graphen einer Parabel und einer Geraden.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung für die Parabel und die Gerade? Entnimm die benötigten Werte dem Koordinatensystem.

b) Bestimme durch Rechnung die Schnittpunkte von Parabel und Gerade.

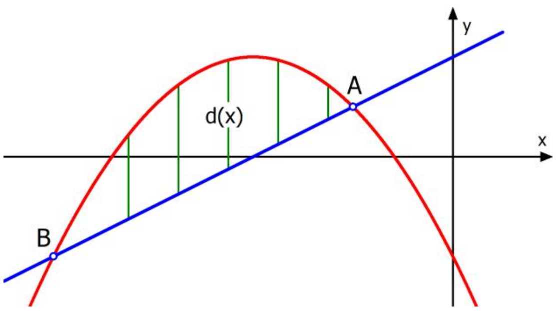
c) Im Bereich $0 < x < 7$ sind senkrechte Strecken zwischen Parabel und Gerade eingezeichnet. Bestimme die längste dieser Strecken rechnerisch.
Gib ihre Länge und den zugehörigen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf der Parabel an.



---

30. Die Punkte $A(-2 \mid 1)$ und $B(-8 \mid -2)$ sind gemeinsame Schnittpunkte von Gerade g und Parabel p mit der Funktionsgleichung $p(x) = -0{,}25x^2 - 2x + c$.

Im Bereich $-8 < x < -2$ sind senkrechte Strecken zwischen Parabel und Gerade eingezeichnet. Bestimme rechnerisch die längste dieser Strecken und gib den zugehörigen x-Wert an.



Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

31. Gegeben sind die Parabeln $p_1: y = x^2 - 6x + 4$ und $p_2: y = -0{,}5\,x^2 + 4$.

a) Bestimme von p_1 und p_2 jeweils den Scheitelpunkt und zeichne beide Parabeln in ein Koordinatensystem mit $-4 \le x \le 6$; $-6 \le y \le 6$.

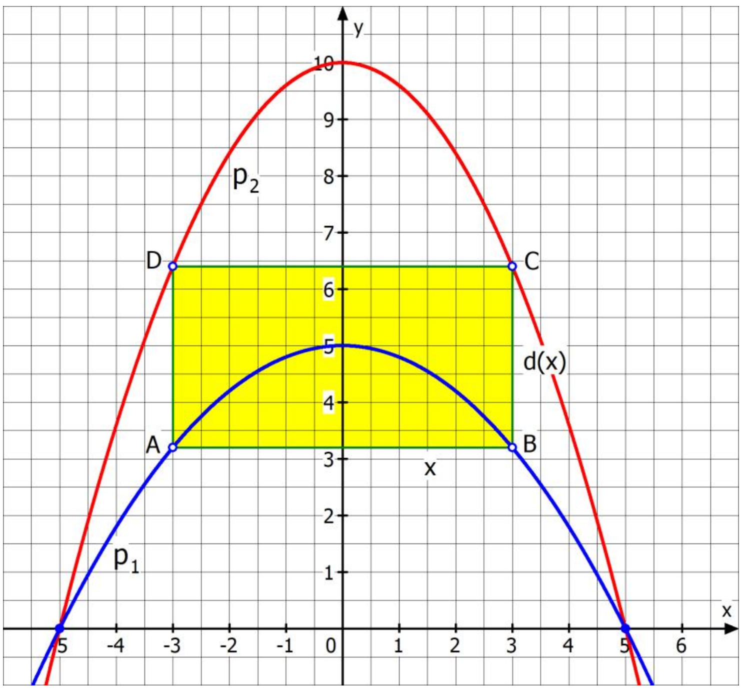
b) Berechne die Schnittpunkte von p_1 mit p_2.
Erg.: $A(0\,|\,4)$ und $B(4\,|\,-4)$

c) Die Punkte $P \in p_2$ und $Q \in p_1$ haben stets dieselbe x-Koordinate. Es gilt:
$P\left(x\,\middle|\,-0{,}5x^2 + 4\right)$ und $Q\left(x\,\middle|\,x^2 - 6x + 4\right)$.
Berechne für das Intervall $0 < x < 4$ den Abstand $d(x) = \overline{P_nQ_n}$ in Abhängigkeit von x. Zeichne $d(x)$ für $x_1 = 2$ in das Koordinatensystem ein.
Bestimme d_{max}, sowie den dazugehörenden x-Wert.

---

32. Gegeben sind die beiden Parabeln
$p_1: y = -0{,}2x^2 + 5$
$p_2: y = -0{,}4x^2 + 10$

Die Eckpunkte A und B bzw. C und D von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ liegen jeweils auf den Parabeln p_1 bzw. p_2.
Die Rechteckseiten sind parallel zu den Koordinatenachsen (vgl. Skizze rechts).



a) Gib eine Funktion A(x) an, die den Flächeninhalt der Rechtecke in Abhängigkeit vom x-Wert des Punktes B beschreibt.
Zulässiges Intervall für die x-Werte: $x \in \,]0; 5[$

b) Unter allen Rechtecken gibt es eines mit dem größten Flächeninhalt.
Gib einen Näherungswert (1 Stelle nach dem Komma) des maximalen Flächeninhaltes und die zugehörige Belegung für x an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

33. Gegeben sind die beiden Parabeln
$p_1:\ y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$ und $p_2:\ y = 0{,}5x^2 - 4x + 5$.

a) Bestimme jeweils die Scheitelkoordinaten und zeichne die Parabeln in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-1 \leq x \leq 9;\quad -4 \leq x \leq 6$

b) Punkte B_n auf der Parabel p_1 und C_n auf der Parabel p_2 bilden zusammen mit $A(5\,|\,-1)$ Dreiecke AB_nC_n. Die Punkte B_n und C_n haben stets die gleiche Abszisse (den gleichen x-Wert).
Zeichne das Dreieck AB_1C_1 für $x = 3$ in das Koordinatensystem.

c) Bestimme den x-Wert für das Dreieck AB_0C_0, dessen Fläche einen Extremwert annimmt.
Von welcher Art ist dieser Extremwert und welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

---

34. Gegeben ist die Parabel $p: y = 0{,}5x^2 - 4x + 10$, $\quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die Gerade $g:\ y = 0{,}5x + 3$ schneidet die Parabel p in den Punkten C und D.

a) Bestimme durch Rechnung die Koordinaten des Scheitels S und zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem. Platzbedarf: $-3 \leq x \leq 9;\quad -3 \leq x \leq 8$

b) Zeichne die Gerade g in das Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte C und D.

c) Der Punkt C bildet zusammen mit den Punkten $A(-2\,|\,0)$ und $B(8\,|\,-2)$ das Dreieck ABC. Zeichne das Dreieck in das Koordinatensystem ein und überprüfe rechnerisch, ob das Dreieck bei C rechtwinklig ist.

d) Der Punkt C_n wandert auf der Parabel und bilden zusammen mit den Punkten A und B Dreiecke ABC_n. Gib die Fläche der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit vom x-Wert des Punktes C_n an.

e) Berechne denjenigen x-Wert, für den die Fläche der Dreiecke ABC_n einen Extremwert annimmt und gib den Flächeninhalt dieses Dreiecks an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

35. Die Punkte $A(2|4)$, $B(7|-1)$ und $C_n(x|y)$ liegen auf der Parabel p mit $y=-x^2+8x-8$ und bilden die Dreiecke ABC_n.

a) Gib p in der Scheitelform an und bestimme den Scheitel S der Parabel.

b) Zeichne die Parabel p und das Dreieck ABC_1 für $x_1=3$ in ein KOS.
Für die Zeichnung: $-1\le x\le 9$; $-2\le y\le 9$

c) Gib ein Intervall für x an, sodass Dreiecke ABC_n entstehen.

d) Stelle den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit vom x-Wert der Punkte C_n dar.

e) Berechne die Koordinaten des Punktes C_0 für das flächengrößte Dreieck ABC_0 und gib diesen maximalen Flächeninhalt an.

---

36. $S(2/1)$ ist der Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten, verschobenen Normalparabel p.

a) Zeichne die Parabel p und stelle ihre Gleichung auf.

b) Zeige durch Rechnung: $R(0/5)$ sowie $Q(3/2)$ sind Punkte der Parabel p.

c) Auf dem Parabelbogen zwischen R und Q wandert ein Punkt P.
Zeichne das Dreieck P_1QR für $x_{P1}=1{,}5$.

d) Stelle den Flächeninhalt aller Dreiecke P_nQR in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes P dar.

e) Gib ein Intervall für x an, sodass Dreiecke P_nQR entstehen.

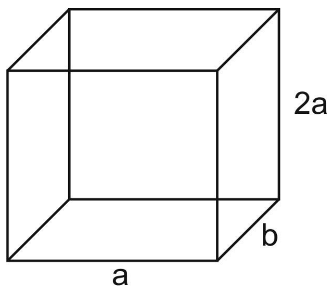
f) Für welchen x-Wert erhält man das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt?

---

37. Aus einem 90 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders entsprechend der nebenstehenden Skizze hergestellt werden. Die „Grundfläche“ A des Quaders hat die Längen a und b, die Quaderhöhe ist 2a.

Für welche Länge a wird die Grundfläche am größten?

Gib diese maximale Grundfläche an.

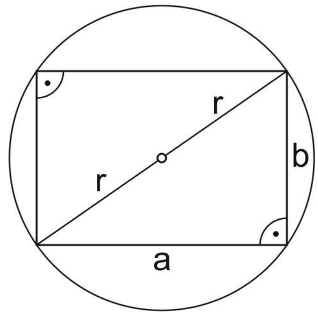


Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

38. In einem Kreis mit Radius r soll ein Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden (siehe Skizze rechts).

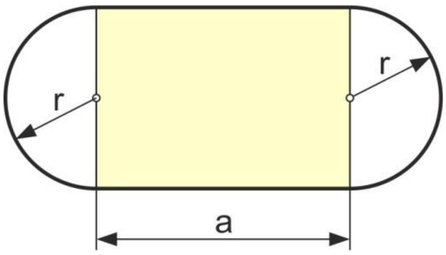
Bestimme die Länge der Seiten a und b für das flächengrößte Rechteck.



---

39. Der **Gesamtumfang** (beide Längsseiten a des Rechtecks und beide Halbkreise mit Radius r) der nebenstehend abgebildeten Sportfläche soll 400 m betragen.

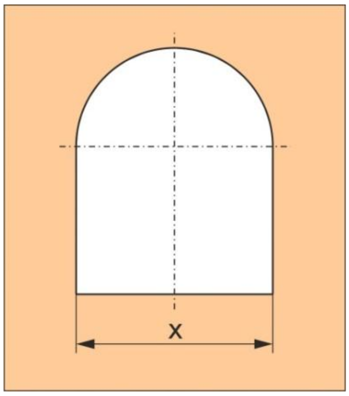
Bestimme den Radius r so, dass die Rechteckfläche (zwischen den beiden Halbkreisen) möglichst groß wird.



---

40. Ein Abwasserkanal soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit anschließendem Halbkreis erhalten (vgl. Skizze rechts).

Berechne die <u>größtmögliche Fläche</u> des Querschnittes in Abhängigkeit vom Maß x, wenn der Umfang des Querschnittes 8 m betragen soll.



---

41. Gegeben ist eine Schar von Dreiecken AB_nC_n mit $A(-1|-2)$.

Die Eckpunkte $C_n(x|y)$ wandern auf der Geraden $g: y = -0{,}5x + 4$. Die Eckpunkte B_n wandern auf der x-Achse; dabei ist die x-Koordinate der Eckpunkte B_n stets um 1 größer als die x-Koordinate der Eckpunkte C_n. Es gilt: $0 \le x \le 8$

a) Zeichne die Dreiecke AB_1C_1 mit $x = 0$ und AB_2C_2 mit $x = 5$ in ein KOS. Für die Zeichnung: 1 LE = 1 cm; $-2 \le x \le 9$; $-3 \le y \le 6$

b) Berechne den Flächeninhalt $A(x)$ aller Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n.

c) Untersuche den Flächeninhalt auf einen Extremwert für $0 \le x \le 8$.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

42. Gegeben sind die Punkte $A(-1|2)$, $B(6|-2)$, $C(4|6)$ sowie die Geraden $g: y = -2$ und $h: x = 4$.

a) Zeichne das Dreieck ABC sowie g und h in ein Koordinatensystem, Platzbedarf: $-2 < x < 10$; $-3 < y < 7$

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Der Punkt B wandert nun auf g um a cm in positiver x-Richtung, C dagegen um 0,5a cm in negativer y-Richtung. Die „neuen“ Punkte heißen B' und C'. Zeichne für $a = 3$ das Dreieck $AB'C'$ in das Koordinatensystem ein.

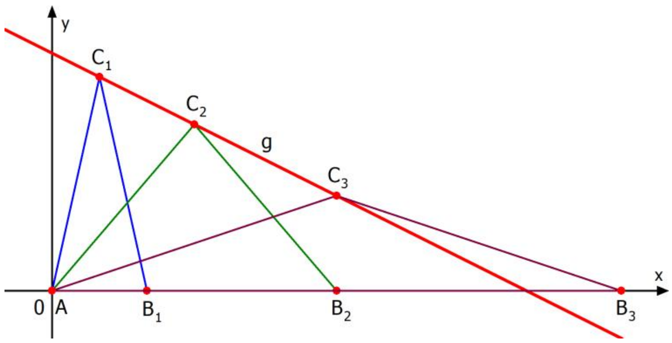
d) Gib die Koordinaten von B' und C' in Abhängigkeit von a an.

e) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke $AB'C'$ in Abhängigkeit von a.

f) Für welche Belegung von a ergibt sich ein Extremwert von A? Gib den Extremwert, seine Art sowie den zugehörigen Wert für a an.

---

43. Durch die Punkte $A(0|0)$, $B(2x|0)$ und $C(x|-0{,}5x+5)$ sind gleichschenklige Dreiecke AB_nC_n festgelegt. In der nebenstehenden Zeichnung sind drei dieser Dreiecke dargestellt.



a) Alle Punkte C_n liegen auf einer Geraden g. Gib die Gleichung für g an.

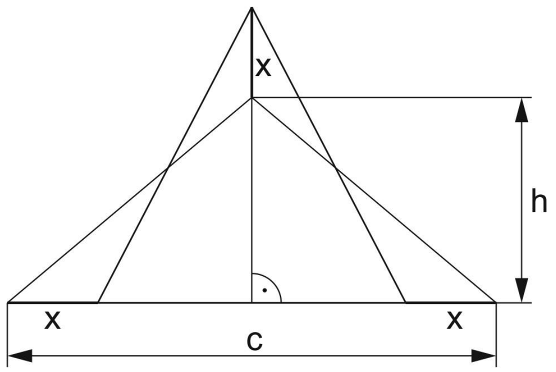
b) Bestimme für x den Definitionsbereich.

c) Für welchen Punkt C_0 ist der Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks AB_0C_0 ein Maximum? Berechne diesen maximalen Flächeninhalt.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

44. Die Basis c eines gleichschenkligen Dreiecks ist 14 cm lang, die Länge der Höhe h auf die Basis beträgt 4 cm. Die Basis wird auf beiden Seiten jeweils um x cm verkürzt, dafür die Höhe um x cm verlängert.



a) Zeige, dass für den Term, der den Flächeninhalt des neuen Dreiecks in Abhängigkeit von x beschreibt, gilt:
$A(x) = (-x^2 + 3x + 28)\,\text{cm}^2$

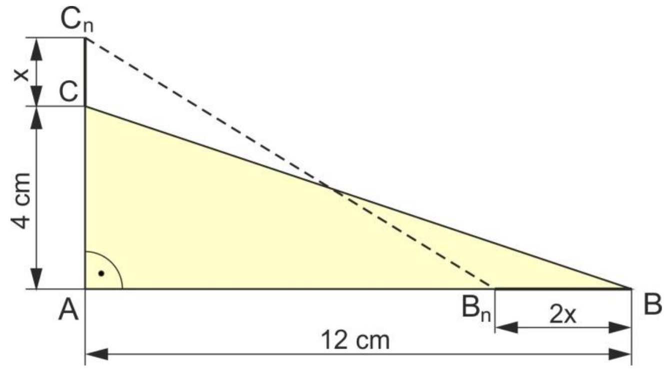
b) Berechne, für welches x der Flächeninhalt A(x) maximal wird.

Wie groß ist A_{max} in diesem Fall ?

Welches besondere Dreieck ergibt sich dann?

---

45. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AB} = 12\text{ cm}$ und $\overline{AC} = 4\text{ cm}$.
Es entstehen neue Dreiecke AB_nC_n, wenn man $\overline{AB}$ von B aus um 2x cm verkürzt und gleichzeitig $\overline{AC}$ über C hinaus um x cm verlängert (vgl. Skizze rechts).



a) Gib das Intervall für x an, damit Dreiecke AB_nC_n entstehen.

b) Berechne den Flächeninhalt aller Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von x.

c) Für welchen x-Wert ist der Flächeninhalt des Dreieck AB_nC_n maximal?

d) Ermittle die Länge der Hypotenuse $\overline{B_nC_n}$ in Abhängigkeit von x.

Gib denjenigen x-Wert an, der einen Extremwert für die Hypotenuse $\overline{B_nC_n}$ liefert. Welcher Art ist dieser Extremwert?

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

46. Gegeben ist die Raute ABCD mit $A(0|-5)$, $B(3|0)$, $C(0|5)$ und $D(-3|0)$.
Verkürzt man die Diagonale [AC] von A und C aus um x LE und verlängert [BD] über B hinaus um 3x LE, so entstehen achsensymmetrische Drachen $A_nB_nC_nD$.

a) Zeichne die Raute ABCD und den Drachen $A_1B_1C_1D$ für $x_1 = 1{,}5$ und bestimme den Flächeninhalt des Drachen.

b) Welche Werte sind für x zulässig?

c) Bestimme den Flächeninhalt A(x) der Drachen $A_nB_nC_nD$ in Abhängigkeit von x.

d) Bestimme die Belegung für x, für die man den Drachen mit dem größten Flächeninhalt erhält. Gib A_{max} an.

---

47. Gegeben ist eine Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm.
Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um 1,5x cm und verkürzt man gleichzeitig die Diagonale [BD] von B und D aus jeweils um x cm, so erhält man neue Rauten $A_nB_nC_nD_n$.

a) Zeichne die Raute ABCD und die Raute $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 2$.

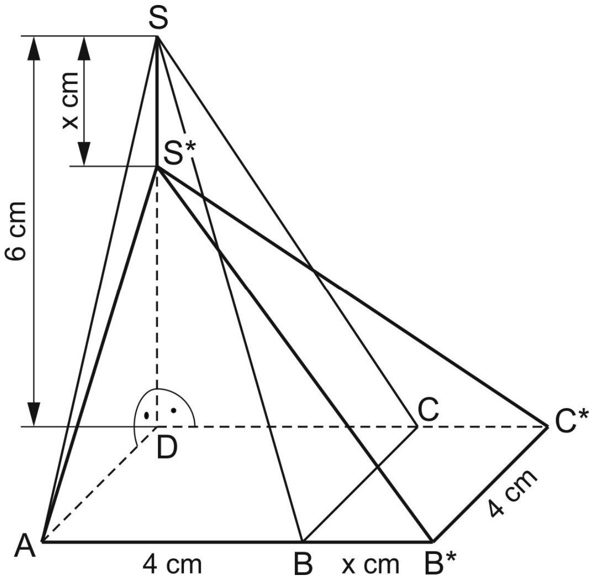
b) Welche Werte darf die Maßzahl x annehmen?

c) Bestimme den Flächeninhalt A(x) der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von x.

d) Bestimme die Belegung für x, für die man die Raute mit dem größten Flächeninhalt erhält. Gib A_{max} an.

---

48. Gegeben ist eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD. Die Seiten des Quadrates sind 4 cm, die Höhe [DS] ist 6 cm lang. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche.
Man erhält neue Pyramiden AB*C*DS* mit rechteckiger Grundfläche, wenn man die Seiten [AB] und [DC] um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe [DS] um x cm kürzt.



a) Ermittle das Volumen V(x) der Pyramiden AB*C*DS* in Abhängigkeit von x.

b) Für welchen x-Wert erhält man eine Pyramide mit 20 cm^3 Volumen?

c) Ermittle rechnerisch die Zahl für x, damit die Pyramide mit dem kleinsten Volumen entsteht. Gib dieses Volumen an.

Extremwertaufgaben

Klassen 8 bis 10

49. Die Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ ist die Grundfläche einer schiefen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche. Es gilt: $e = 10\text{ cm}$; $f = 8\text{ cm}$; $\overline{DS} = h = 6\text{ cm}$.
Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um x cm und verkürzt [DS] von S aus um x cm, so erhält man neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$.

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit AC als Schrägbildachse, sowie $\omega = 45°$ und $q = 0,5$. Zeichne ferner die für $x_1 = 2$ neu entstandene Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

b) Stelle das Volumen der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

c) Ermittle den Extremwert für das Volumen und gib an, um welche Art von Extremwert es sich handelt.

d) Für welche Werte von x wird der Flächeninhalt des Schnittdreiecks BDS_n der Pyramiden kleiner als 14 cm^2 ?

---

50. Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 6 cm ist die Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M.
Verlängert man die Seiten [AB] und [CD] über die Endpunkte hinaus um jeweils x cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe um x cm ($0 < x < 10$), so entstehen neue vierseitige Pyramiden A*B*C*D*S* mit dem Rechteck A*B*C*D* als Grundfläche.

a) Zeichne ein Schrägbild der ursprünglichen Pyramide (CD = Schrägbildachse; $\omega = 45°$; $q = 0,5$) und zeichne eine Pyramide A*B*C*D*S* ein.

b) Berechne das Volumen der Pyramiden A*B*C*D*S* in Abhängigkeit von x.

c) Für welche Belegung von x erhält man die Pyramide mit dem größten Volumen?

d) Für welche Belegung von x besitzt die Seitenfläche B*C*S* der Pyramide einen extremen Flächeninhalt?

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben ab Seite 4

Grundlagen und Begriffe der Differenzialrechnung

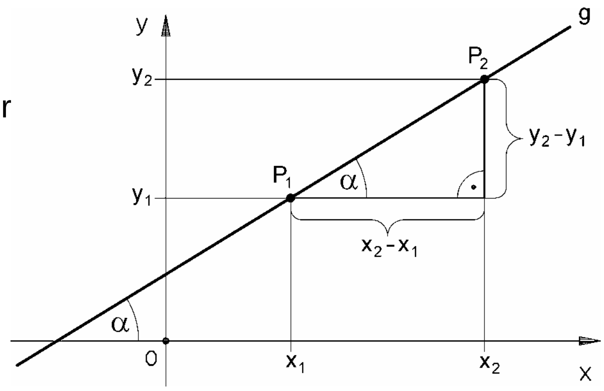
Die Zeichnungen und Erklärungen sind etwas ausführlicher als notwendig um verschiedene Schreibweisen und Darstellungen aufzuzeigen.

Steigung einer Geraden:

Es seien $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ zwei Punkte der Geraden g mit $x_1 \neq x_2$.

Dann gilt für die Steigung m: $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Der Steigungswinkel ist: $\boxed{m = \tan\alpha}$



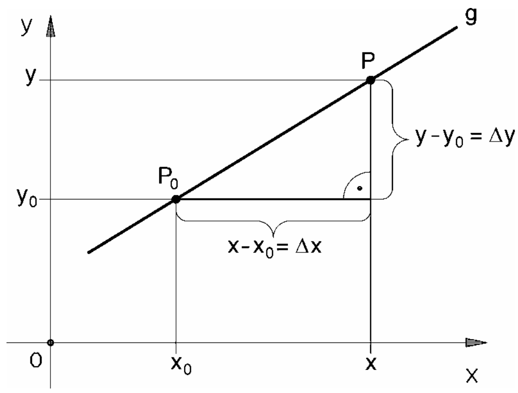
Differenzenquotient:

Ist der Funktionsgraph eine Gerade, so ist ihre Steigung in jedem beliebigen Punkt $P_0(x_0 \mid y_0)$ durch den Faktor m festgelegt.

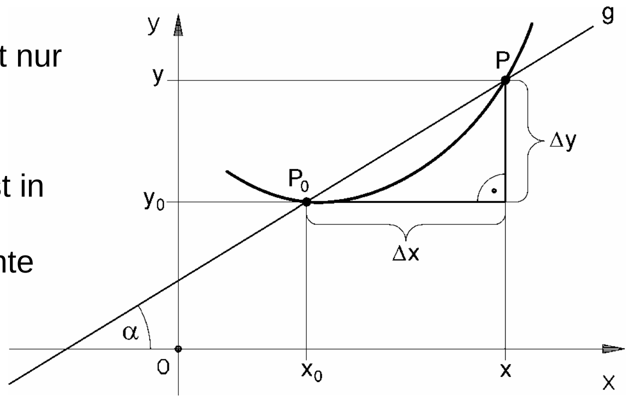
Der Quotient aus der Differenz der y-Werte und der x-Werte bezüglich der Stelle x_0 nennt man

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m}$$



Der Begriff des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist nicht nur bei Geraden definiert, sondern wird auch bei gekrümmten Graphen angewendet.
Diese Verallgemeinerung des Steigungsbegriffs ist in nebenstehender Skizze dargestellt.
Die Sekante durch P_0 und P ist die bereits bekannte Gerade.
Die Steigung aller Sekanten durch $P_0(x_0 \mid y_0)$ entspricht jeweils dem Differenzenquotienten bezüglich der Stelle x_0.



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Die Gleichung des Differenzenquotienten läßt sich auch wie folgt schreiben:

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

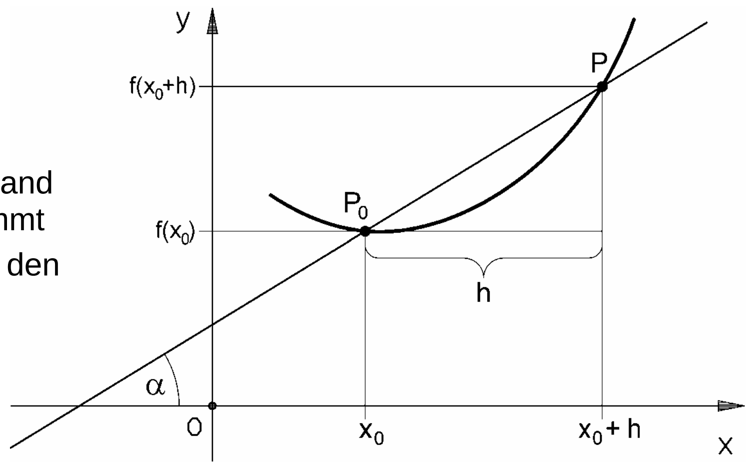
Nebenbei bemerkt:
Die Sekantensteigung ist identisch mit der Geradensteigung:

$$\boxed{m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha}$$

Differenzialquotient oder 1. Ableitung oder Steigung der Tangente

Wird für den Abstand $\Delta x = x - x_0$ zur Vereinfachung die Variable h eingesetzt, dann hat der Differenzenquotient folgende Form:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$



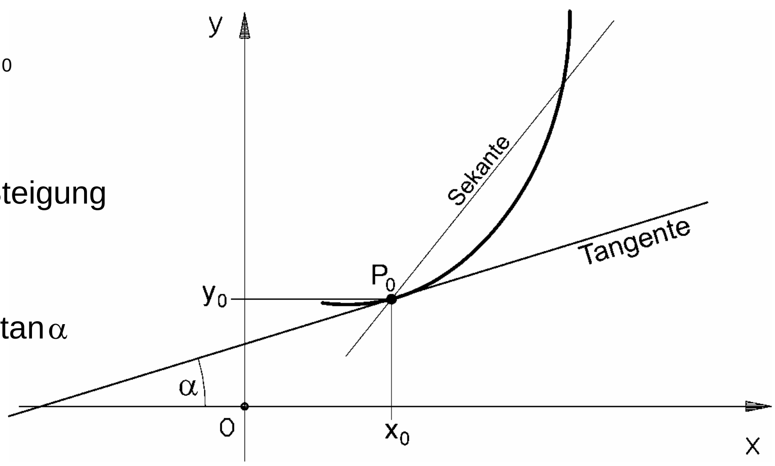
Verringert man nun - gedanklich - den Abstand $h\,(=\Delta x)$ so daß dieser den Wert Null annimmt (man schreibt auch $x \to x_0$), so erhält man den Grenzwert des Differenzenquotienten.
Dieser Grenzwert heißt

Differenzialquotient

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \quad \text{mit } |h| > 0$$

oder

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{mit } x \neq x_0$$



Der Differenzialquotient ist zugleich die Steigung der Tangente im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$

$$m_T = f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Definitionen:

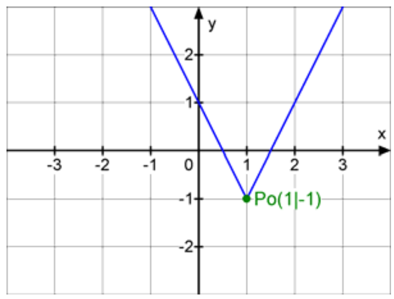
Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 ist die Steigung des Graphen G_f im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$.

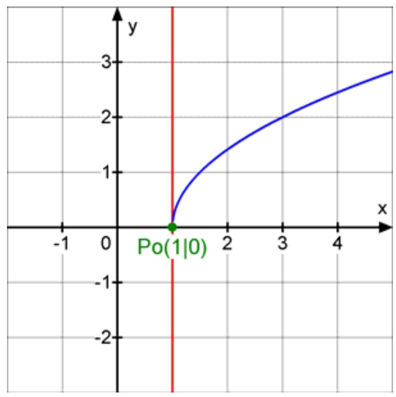
Für den Neigungswinkel α der Tangente in diesem Punkt gilt: $\tan\alpha = f'(x_0)$

Sonstiges:

Es könnte sein, daß es in P_0 keine eindeutige Tangente an den Graphen gib. Ein Beispiel ist in der Skizze rechts dargestellt.
In diesem Fall existiert auch kein Grenzwert.



Für den Fall, daß die Tangente senkrecht verläuft (siehe nebenstehende Skizze), ist die Steigung der Tangente nicht definiert.
Auch in diesem Fall existiert kein Grenzwert.



Formeln:

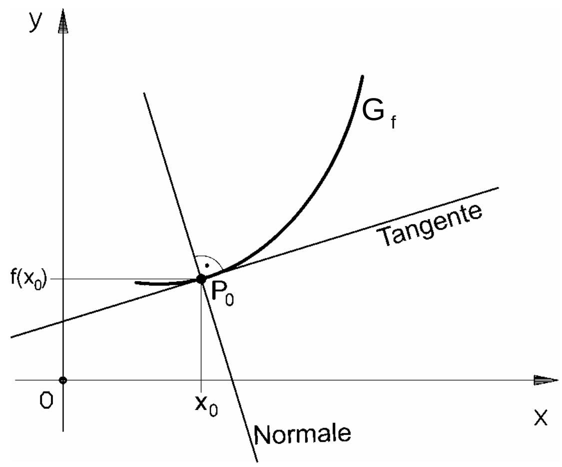
Nachfolgende Formeln sind hier nur der Vollständigkeit angegeben. In den Lösungen zu den Aufgaben werden sie nicht verwendet.

Gleichung der Tangente von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$$

Gleichung der Normale von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)} \qquad \text{falls } f'(x_0) \neq 0$$



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben

1. Bestimme jeweils den Neigungswinkel der Tangente an die Parabel $y = x^4$ in den folgenden Kurvenpunkten (2 Dezimalstellen):

a) $R(0{,}8 \mid ?)$ b) $S(-1 \mid ?)$ c) $T(0 \mid ?)$

2. Gegeben ist die Parabel $y = 0{,}5x^2$. Berechne die Koordinaten der Berührpunkte von Tangenten die folgende Neigungswinkel haben (2 Dezimalstellen):

a) $62°$ b) $-54{,}12°$ c) $0{,}01°$

3. Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y = 2x^2$, die

a) parallel ist zur Geraden $g:\ 2x + 1 - y = 0$.

b) zur Geraden $h:\ 2y - 3x + 6 = 0$ orthogonal angeordnet ist.

4. Gegeben sei die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5,\quad x \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $P(3 \mid 4)$.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente t_2 und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $Q(1 \mid 0)$.

c) Bestimme den Schnittwinkel der Tangenten t_1 und t_2.

5. Bestimme die Tangenten an die Parabel $y = x^2 - 2$, die sich im Punkt $S(0 \mid -4{,}25)$ schneiden.

6. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $A_0(-1 \mid -1)$.
Die Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne die Fläche des Dreiecks.

7. Die Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $R(1 \mid 1)$ schneidet den Graphen im Punkt Q. Berechne die Gleichung der Tangente sowie die Koordinaten das Schnittpunktes Q.

8. Bestimme für den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto \sqrt{x} - 2,\quad x \in \mathbb{R}_0^+$

a) den Neigungswinkel der Tangente im Punkt $B(4 \mid ?)$.

b) die Koordinaten jenes Kurvenpunktes P, für den die Tangente an f unter 60° gegen die x-Achse geneigt ist.

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

9. In welchen Punkten des Graphen mit der Gleichung $f:\ y = -\frac{1}{x}$ sind die Tangenten parallel zur Geraden $g:\ 0{,}5x - y = 0$?

10. Bestimme im Schnittpunkt der beiden Graphen mit den Gleichungen $y = \sqrt{x}\ ;\ x \in \mathbb{R}_0^+$ und $y = \frac{1}{x}$ die Tangenten t_1 und t_2 (an den jeweiligen Graph).

11. Berechne den Neigungswinkel φ gegen die x-Achse der Tangente im Punkt $P(1\,|\,?)$ an die Sinuskurve mit der Gleichung $y = \sin x$.

12. Die Graphen der Funktionen $f:\ x \mapsto \sin x;\ x \in [-0{,}5;\ 2]$ und $g:\ x \mapsto \cos x;$ $x \in [-0{,}5;\ 2]$ schneiden sich im Punkt S. Bestimme jeweils den spitzen Winkel den die beiden Tangenten im Punkt S mit der der x-Achse bilden.

13. Bestimme die beiden waagerechten Tangenten am Graph der Funktion $h:\ x \mapsto x + 2\sin x;\ D_f = [0;\ 2\pi]$

14. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2\,|\,?)$ des Graphen von $f:\ x \mapsto 0{,}5(x-1)^2 + 1$?

15. An den Parabelbogen $y = -0{,}4(x-2)^2 - 1{,}5$ soll vom Punkt $R(0\,|\,5)$ ausgehend eine Tangente so gelegt werden, daß ihre Steigung einen negativen Wert einnimmt. Bestimme die Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes B_0.

16. In welchen Punkten des Graphen von $f:\ x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3};\quad D_f = \mathbb{R}$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein ?

Wie ist ohne Zeichnung erkennbar, daß es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?

17. Berechne den Schnittwinkel der Graphen folgender Funktionen:

$f:\ x \mapsto 8x^{-2};\quad x \in \mathbb{R}^+$ und $g:\ x \mapsto 0{,}5x^2;\quad x \in \mathbb{R}^+$

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 1

Autor: Dr. Georg Elsting

1. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als einfache Nullstelle und $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$ als einfache Polstellen.
Skizzieren Sie den Graphen.

2. Nennen Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = -3$ als einfache Nullstelle, $x = -2$ als doppelte Polstelle und mit der x-Achse als eine Asymptote. Skizzieren Sie den Graphen.

3. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 0{,}1 \cdot \left(x^3 - e^{x^3}\right)$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{e} - e^x}$

4. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.

5. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[3]{2}$ als Nullstelle der Funktion $x^3 - 2$.

6. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{\frac{\cos 2x - 3\cos x + 2}{2}} - 1{,}5$ auf globale Extrema im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7. Geben Sie ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = 1$, $x = 3$ lokale Minima und an den Stellen $x = 2$, $x = 4$ lokale Maxima hat.

8. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + ax$ auf Terrassenpunkte.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 2

9. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als Nullstelle, mit $x = -0{,}5$ als Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und mit $x = 0{,}5$, $x = 1$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Skizzieren Sie den Graphen.

10. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $y = -2x + 1$ als eine schräge Asymptote und mit der y-Achse und den Geraden $x = -1$, $x = 1$ als senkrechte Asymptoten. Skizzieren Sie den Graphen.

11. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 0{,}5x^3 + \cos x^3$

b) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$

12. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

13. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[4]{3}$ als Nullstelle der Funktion $x^4 - 3$.

14. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^6 - x^3 + 1}{-x^6 + x^3 + 1}$ auf globale Extrema im Intervall $[0;1]$.

15. Finden Sie Stammfunktionen für den Sinus hyperbolikus $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und für den Cosinus hyperbolikus $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

16. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = 0{,}2x^5 - x + a$ für keine reelle a fünf Nullstellen hat.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 3

17. Geben Sie ein Beispiel von einer Funktion die $x = 0$ als Nullstelle, $x = \pm 0{,}5$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel und keine weiteren Null- und Polstellen hat und dabei <u>keine gebrochen-rationale</u> Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen.

18. Geben Sie ein Beispiel von einer im Intervall $[1;\ \infty[$ definierten Funktion, deren Term eine tan(x) Funktion enthält, und deren Graph die Gerade $y = x$ als eine schräge Asymptote hat. Skizzieren Sie den Graphen.

19. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = 32x^3 - \ln\left(1 + 64x^3\right),\ \ x > -0{,}25$

b) $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{\sqrt{1 + x^6}}$

20. Gegeben ist, dass die überall differenzierbare Funktion $y = f(x)$ auf der ganzen Zahlengeraden gerade ist, d. h., dass $f(-x) = f(x)$ für ein beliebiges x.
Beweisen Sie, dass die für die Ableitung $f'(x)$ gilt $f'(-x) = -f'(x)$ für ein beliebiges x.
(D. h., dass die Ableitung $y = f'(x)$ eine ungerade Funktion ist.)

21. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} - 0{,}3x = 0$ eine einzige Nullstelle hat und berechnen Sie diese mit dem Newton-Verfahren und mit dem Startwert $x = 0$.

22. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\right) + 3x$ auf globale Extrema im Intervall $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

23. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

24. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = e^{-\sqrt{2}\cdot\sin x} + \sqrt{2}\cdot\sin x - 1$ gilt:
$f'(x) = -\sqrt{2}\cdot\cos x \cdot f(x) + \sin 2x$.

Gymnasium

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 4

25. a) Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2k + 1$ und mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k, \quad k = 1, 2, 3, ..., n$. Skizzieren Sie den Graphen für n = 2.

b) Geben Sie ein Beispiel von einer (nicht gebrochen-rationalen) Funktion mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k,\ k \in \mathbb{N}$.

26. Für welches a und b gibt es einen Punkt P, wo die Graphen der Funktionen $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \frac{(x-a)^3}{3} + x + b$ eine gemeinsame Tangente haben ?

27. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:

a) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{4(x\ -1)^4}, \ x \neq 1$

b) $f(x) = \tan x - \frac{4x}{3}, \ x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

28. Bei welchem a hat die Funktion $f(x) = \cos^2 x + a \cdot x$ Extremstellen ? Deren Graph Terrassenpunkte ?

29. Beweisen Sie, dass die Gleichung $5^x - x^2 - 2 = 0$ eine einzige Nullstelle im Intervall $[0; 1]$ hat und berechnen Sie die mit dem Newton-Verfahren mit dem Startwert $x = 1$.

30. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x = 0$ auf globale Extrema im Intervall $[0; 2\pi]$.

31. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die ganzrationale Funktion $f(x) = x^{10} + x^9 - 1{,}8x^8 - 0{,}2$ genau eine positive Nullstelle hat.

32. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2\sqrt{\frac{x}{5}}$ gilt: $\left(x \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x)\right)^2 = 16{,}2x$.

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

1. Die Parabel $y = x^2$ wird durch die angegebenen Vektoren parallel verschoben. Wie lautet die Gleichung der verschobenen Parabel?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Gib die Koordinaten der Scheitel folgender Parabel an. Bringe dazu die Funktionsgleichung auf die Scheitelform. Gib auch die Gleichung der Symmetrieachse an.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2 + 6x + 5$ c) $y = x^2 + 4$

d) $y = x^2 - 8x$ e) $y = x^2 + 5x + 3{,}25$

3. Bestimme die Gleichung der Normalparabel mit den folgenden Scheitelpunktskoordinaten und Öffnung der Parabel nach oben bzw. unten.
Gib die Funktionsgleichung jeweils in Normalform an.

a) $S_1\left(-2 \,\middle|\, 6\right)$, Graph nach unten geöffnet,

b) $S_2\left(-4 \,\middle|\, -5\right)$, Graph nach oben geöffnet,

c) $S_3\left(\frac{5}{6} \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$, Graph nach unten geöffnet,

4. Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat ihren Scheitel auf der y-Achse und verläuft durch den angegebenen Punkt P. Bestimme jeweils die Gleichung der Parabel.

a) $P_1\left(-1 \,\middle|\, 0{,}5\right)$ b) $P_2\left(4 \,\middle|\, 16\right)$ c) $P_3\left(-2 \,\middle|\, -5\right)$

5. Parabeln der Form $y = a x^2$ verlaufen durch die angegebenen Punkte. Gib den Wert der Variablen a an.

a) $P\left(-0{,}5 \,\middle|\, -0{,}125\right)$ b) $Q\left(3 \,\middle|\, -90\right)$ c) $R\left(-\frac{1}{5} \,\middle|\, \frac{3}{25}\right)$

6. Ermittle die Scheitelkoordinaten folgender Parabeln durch quadratische Ergänzung.

a) $y = 2x^2 + 8x + 6$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$ c) $y = -x^2 - 4x - 5$

d) $y = 3x^2 - 9x$ e) $y = -a x^2 - b x + c$

7. Gib die Definitions- und die Wertemenge folgender Funktionen an. Bestimme jeweils die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen.

a) $y = 0{,}75x^2 + 6x + 11{,}5$

b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$

c) $y = -0{,}5x^2 - 0{,}5x + 0{,}375$

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

8. Die Parabeln mit den folgenden Gleichungen sollen mit dem angegebenen Vektor parallel verschoben werden. Gib jeweils die Gleichung der Bildparabel an.

a) $p_1: y = 0{,}8x^2;\ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $p_2: y = -\frac{1}{6}x^2;\ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $p_3: y = -x^2;\ \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

9. Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$ verlaufen durch die Punkte A und B und haben den Scheitel S. Bestimme die Werte der Variablen a, b und c.

a) $a = -3;\ \ S(4 \mid 2)$

b) $a = 2;\ \ b = c;\ \ A(4 \mid 0)$

c) $a = -2;\ \ A(0 \mid 6);\ \ B(3 \mid 2)$

10. Überprüfe rechnerisch, ob die Punkte A, B und C auf dem Graphen der Parabel $y = x^2 + 0{,}5$ liegen.

a) $A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -1\right)$ b) $B\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \mid 2{,}5\right)$ c) $C\left(-0{,}1 \mid \frac{51}{100}\right)$

11. Überprüfe, ob gilt $A \in p$.

a) $p_1:\ y = -0{,}5x^2 - 4x - 4;\ \ A_1(2 \mid -13)$

b) $p_2:\ y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 5;\ \ A_2(-3 \mid -2)$

c) $p_3:\ y = 2{,}5x^2 - 5;\ \ A_3(17 \mid 725)$

Realschule

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

12. Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 6x + 9$

a) Bestimme rechnerisch den Scheitel, die Wertemenge und die Gleichung der Symmetrieachse.

b) Zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: $7 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 10$

c) Die Punkte $A(-1|4)$ und $B(-6|9)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n \in p$ Eckpunkte von Dreiecken ABC_n. Zeichne das Dreieck ABC_1 für $x_1 = -5$.

d) Entnimm der Zeichnung, für welche Werte von x Dreiecke ABC_n entstehen können und gib diese Werte (Intervall) an.

e) Berechne den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n.

f) Für welchen x-Wert ist der Flächeninhalt maximal? Gib diesen Wert A_{max} an.

13. Die Parabel p hat die Gleichung $y = x^2 - 2x - 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes S von der Parabel p und zeichne sodann den Graph von p in ein Koordinatensystem.

b) Die Punkte $C_n\left(x \,\middle|\, x^2 - 2x - 2\right)$ auf der Parabel p bilden zusammen mit den Punkten $A(-2|-2)$ und $B(1|-4)$ Dreiecke ABC_n.
Zeichne die Dreiecke ABC_1 für $x = 0$ und ABC_2 für $x = 3$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: $-3 \le x \le 5$; $-5 \le y \le 4$.

c) Zeige durch Rechnung, dass sich der Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = \left(1{,}5x^2 - 2x + 2\right)$ FE

d) Das Dreieck ABC_0 hat den kleinsten Flächeninhalt A_{min}. Berechne den kleinstmöglichen Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n und die Koordinaten von C_0.

Parabeln - Grundlagenaufgaben

Klasse 9 oder 10

14. Gegeben ist die Normalparabel p. Die Symmetrieachse s dieser Parabel hat die Gleichung $x = -4$. Der Punkt $P(-2\,|\,2)$ liegt auf der Normalparabel p.

a) Bestimme rechnerisch die Scheitelform der Parabel p und zeige anschließend, dass sich die Parabel durch die Gleichung $y = x^2 + 8x + 14$ darstellen lässt.

b) Die Punkte $R_n\left(x \,\middle|\, x^2 + 8x + 14\right)$ auf der Parabel p bilden zusammen mit den Punkten $P(-2\,|\,2)$ und $Q(-7\,|\,7)$ Dreiecke PQR_n.
Zeichne die Parabel p und das Dreieck PQR_1 für $x = -5$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: $-8 \le x \le 1$; $-3 \le y \le 8$

c) Entnimm der Zeichnung, für welche Werte von x Dreiecke PQR_n entstehen können und gib diesen Bereich an.

d) Zeige durch Rechnung, dass sich der Flächeninhalt A(x) der Dreiecke PQR_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte R_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = \left(-2{,}5x^2 - 22{,}5x - 35\right)\,\text{FE}$

e) Das Dreieck PQR_0 hat den größten Flächeninhalt A_{max}. Berechne den größtmöglichen Flächeninhalt der Dreiecke RQR_n und die Koordinaten von R_0.

