

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 1

Autor: Dr. Georg Elsting

1. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als einfache Nullstelle und $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$ als einfache Polstellen. Skizzieren Sie den Graphen.
2. Nennen Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = -3$ als einfache Nullstelle, $x = -2$ als doppelte Polstelle und mit der x -Achse als eine Asymptote. Skizzieren Sie den Graphen.
3. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:
 - a) $f(x) = 0,1 \cdot (x^3 - e^{x^3})$
 - b) $f(x) = e^{\frac{x}{e} - e^x}$
4. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.
5. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[3]{2}$ als Nullstelle der Funktion $x^3 - 2$.
6. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{\frac{\cos 2x - 3 \cos x + 2}{2}} - 1,5$ auf globale Extrema im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
7. Geben Sie ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = 1$, $x = 3$ lokale Minima und an den Stellen $x = 2$, $x = 4$ lokale Maxima hat.
8. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + ax$ auf Terrassenpunkte.

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 2

9. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $x = 0$ als Nullstelle, mit $x = -0,5$ als Polstelle ohne Vorzeichenwechsel und mit $x = 0,5$, $x = 1$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Skizzieren Sie den Graphen.
10. Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit $y = -2x + 1$ als eine schräge Asymptote und mit der y -Achse und den Geraden $x = -1$, $x = 1$ als senkrechte Asymptoten. Skizzieren Sie den Graphen.
11. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:
- a) $f(x) = 0,5x^3 + \cos x^3$
- b) $f(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$
12. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.
13. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren annähernd den Wert $\sqrt[4]{3}$ als Nullstelle der Funktion $x^4 - 3$.
14. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^6 - x^3 + 1}{-x^6 + x^3 + 1}$ auf globale Extrema im Intervall $[0; 1]$.
15. Finden Sie Stammfunktionen für den Sinus hyperbolicus $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und für den Cosinus hyperbolicus $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
16. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = 0,2x^5 - x + a$ für keine reelle a fünf Nullstellen hat.

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 3

17. Geben Sie ein Beispiel von einer Funktion die $x = 0$ als Nullstelle, $x = \pm 0,5$ als Polstellen mit Vorzeichenwechsel und keine weiteren Null- und Polstellen hat und dabei keine gebrochen-rationale Funktion ist. Skizzieren Sie den Graphen.
18. Geben Sie ein Beispiel von einer im Intervall $[1; \infty[$ definierten Funktion, deren Term eine $\tan(x)$ Funktion enthält, und deren Graph die Gerade $y = x$ als eine schräge Asymptote hat. Skizzieren Sie den Graphen.
19. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:
- a) $f(x) = 32x^3 - \ln(1 + 64x^3)$, $x > -0,25$
- b) $f(x) = \frac{1+x^3}{\sqrt{1+x^6}}$
20. Gegeben ist, dass die überall differenzierbare Funktion $y = f(x)$ auf der ganzen Zahlengeraden gerade ist, d. h., dass $f(-x) = f(x)$ für ein beliebiges x .
Beweisen Sie, dass die für die Ableitung $f'(x)$ gilt $f'(-x) = -f'(x)$ für ein beliebiges x .
(D. h., dass die Ableitung $y = f'(x)$ eine ungerade Funktion ist.)
21. Beweisen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} - 0,3x = 0$ eine einzige Nullstelle hat und berechnen Sie diese mit dem Newton-Verfahren und mit dem Startwert $x = 0$.
22. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 3\cos\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + 3x$ auf globale Extrema im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
23. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$.
24. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = e^{-\sqrt{2} \cdot \sin x} + \sqrt{2} \cdot \sin x - 1$ gilt:
 $f'(x) = -\sqrt{2} \cdot \cos x \cdot f(x) + \sin 2x$.

Analysis - Übungen

Klasse 11 / 12

Teil 4

25. a) Geben Sie ein Beispiel von einer gebrochen-rationalen Funktion mit Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2k + 1$ und mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Skizzieren Sie den Graphen für $n = 2$.
- b) Geben Sie ein Beispiel von einer (nicht gebrochen - rationalen) Funktion mit Polstellen ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
26. Für welches a und b gibt es einen Punkt P , wo die Graphen der Funktionen $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \frac{(x-a)^3}{3} + x + b$ eine gemeinsame Tangente haben?
27. Untersuchen Sie mithilfe der Ableitungsfunktionen folgende Funktionen auf Monotonie und Extrema:
- a) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{4(x-1)^4}$, $x \neq 1$
- b) $f(x) = \tan x - \frac{4x}{3}$, $x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
28. Bei welchem a hat die Funktion $f(x) = \cos^2 x + a \cdot x$ Extremstellen? Deren Graph Terrassenpunkte?
29. Beweisen Sie, dass die Gleichung $5^x - x^2 - 2 = 0$ eine einzige Nullstelle im Intervall $[0; 1]$ hat und berechnen Sie die mit dem Newton-Verfahren mit dem Startwert $x = 1$.
30. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x = 0$ auf globale Extrema im Intervall $[0; 2\pi]$.
31. Beweisen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens, dass die ganzrationale Funktion $f(x) = x^{10} + x^9 - 1,8x^8 - 0,2$ genau eine positive Nullstelle hat.
32. Beweisen Sie, dass für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2\sqrt{\frac{x}{5}}$ gilt: $(x \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x))^2 = 16,2x$.