Stochastik - Kapitel 1

Aufgaben ab Seite 9

I. Ereignisräume
1. Ergebnis und Ergebnisraum; Baumdiagramm

Experimente werden nach der Vorhersehbarkeit ihres Versuchsausganges unterschieden:

- Experimente, deren Ergebnisse vor den jeweiligen speziellen Versuchsdurchführungen bekannt sind nennt man deterministische (von vorneherein bestimmte) Experimente

- Experimente, über deren Ausgang man vor der Versuchsdurchführung keine sicheren Aussagen machen kann, werden als **Zufallsexperimente** bezeichnet.

Jeder einzelne Ausgang eines Zufallsexperimentes wird als **Ergebnis** ω bezeichnet.
Alle Ergebnisse ω zusammen, bilden die Menge Ω, die **Ergebnisraum** genannt wird.

Beispiele zu Ergebnissen und Ergebnisräumen:

1. Werfen einer Münze:
Mögliche Ergebnisse: ω_1 = Zahl, ω_2 = Kopf;
Ergebnismenge / Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Z, K\}$

2. Werfen eines Würfels und Notieren der Augenzahl:
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Werfen eines Würfels und Notieren, ob die Augenzahl gerade oder ungerade ist:
$\Omega_2 = \{g, u\}$

4. Werfen eines Würfels und Notieren ob 1 (Treffer T) geworfen wird, oder nicht (Niete N):
$\Omega_3 = \{T, N\}$
$\Rightarrow$ Man kann sagen, dass Ω_2 und Ω_3 eine Verfeinerung von Ω_1 ist.

5. Eine Münze zweimal hintereinander werfen und die gefallene Seite notieren:
$\Omega = \{KZ, ZK, ZZ, KK\}$
$\Rightarrow$ Ein derartiges Experiment wird **zweistufiges Zufallsexperiment** genannt.

Merke: Besteht ein Zufallsexperiment aus n Einzelexperimenten bezeichnet man jedes Ereignis als ein n - **Tupel**.
Durch **Baumdiagramme** lassen sich die Ergebnisräume solcher zusammengesetzter bzw. mehrstufiger Zufallsexperimente am besten veranschaulichen.
Besitzt Ω n verschiedene Elemente, so existieren insgesamt 2^n verschiedene Ereignisse.

Stochastik - Kapitel 1

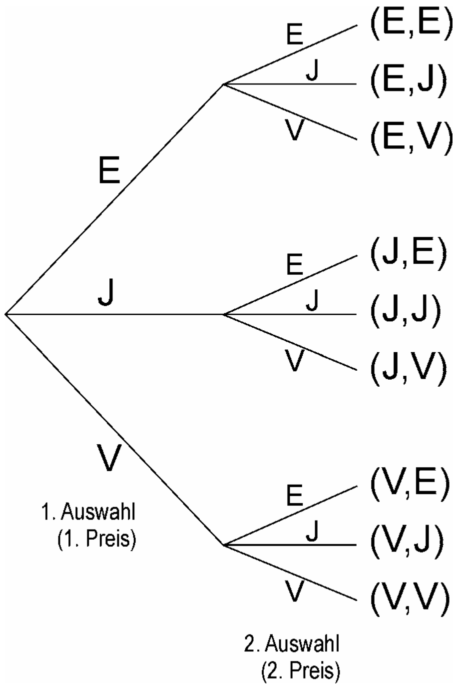
Beispiele zu Zufallsexperimenten:

1. Die Lehrerin lost unter den Schülern Elisabeth, Johannes und Viktor zufällig zwei Preise aus.
Wir suchen nun die Ergebnismenge und stellen das dazugehörige Baumdiagramm dar, für den Fall, dass ein Schüler
a) beide Preise
b) höchstens einen der Preise
erhält.

Lösung:
a) Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung)

$$\Omega = \{(E,E),(E,J),(E,V),(J,E),(J,J),(J,V),(V,E),(V,J),(V,V)\}$$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 3^2 = 9$



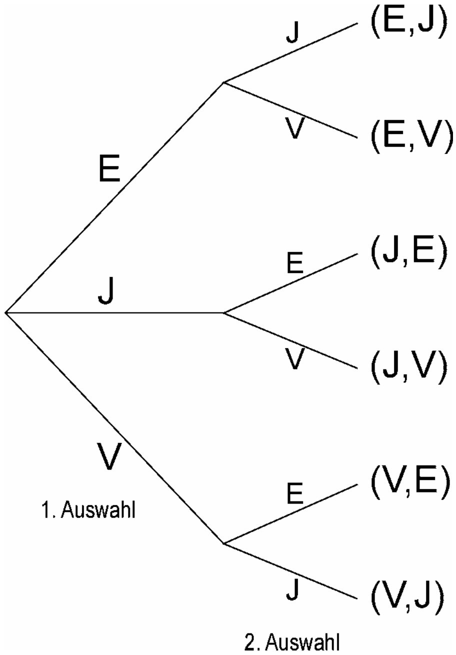
Unabhängig vom Ergebnis der ersten Auswahl, kann bei der zweiten Auswahl jeder der drei Schüler ausgewählt werden.

Stochastik - Kapitel 1

b) Ziehen ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)

$\Omega = \{(E,J),(E,V),(J,E),(J,V),(V,E),(V,J)\}$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 3 \cdot 2 = 6$



Derjenige Schüler, der den ersten Preis erhalten hat, darf beim zweiten Zug nicht mehr ausgewählt werden.
Die beiden Namen müssen, im Gegensatz zur Teilaufgabe a), in den Versuchsergebnissen (…,…) unterschiedlich sein.

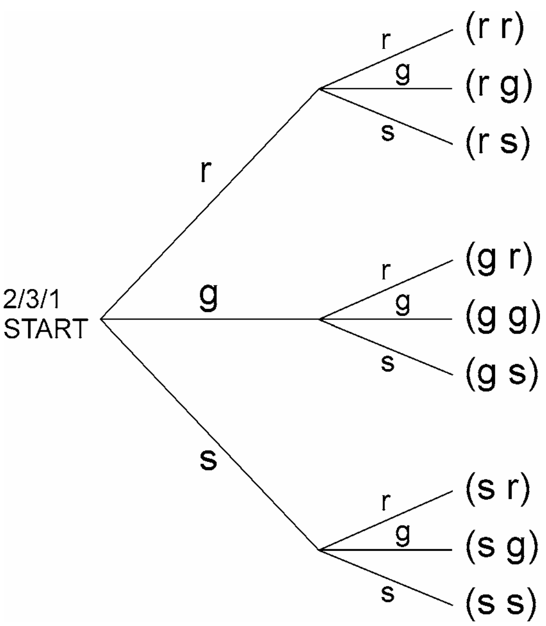
Stochastik - Kapitel 1

2. Aus einer Urne mit 2 rosafarbenen, 3 grauen und 1 schwarzen Kugel wird zweimal eine Kugel
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
gezogen.
Wir suchen auch bei dieser Aufgabe den Ergebnisraum und stellen anschließend das dazugehörige Baumdiagramm dar.

Lösung:

a) mit Zurücklegen
$\Omega = \{rr, rg, rs, gr, gg, gs, sr, sg, ss\}$

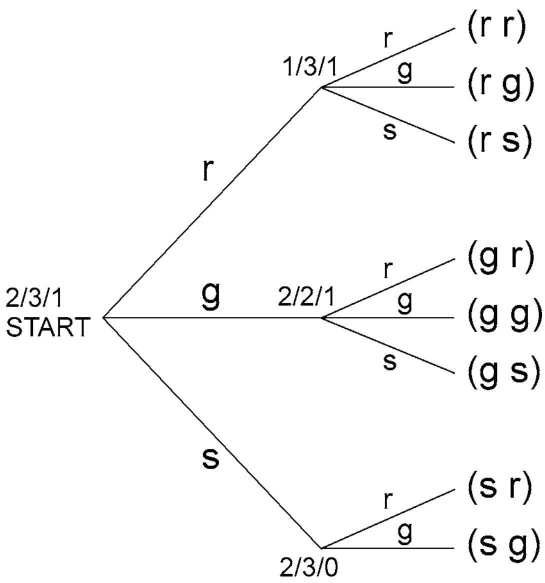
Anzahl der Elemente $|\Omega| = 9$



Der Urneninhalt bleibt bei dieser Methode mit Zurücklegen unverändert.

b) ohne Zurücklegen
$\Omega = \{rr, rg, rs, gr, gg, gs, sr, sg\}$

Anzahl der Elemente $|\Omega| = 8$



Bei diesem Modell ohne Zurücklegen verändert sich der Urneninhalt von Zug zu Zug.

Merke:

$\Rightarrow$ Mehrstufige **Zufallsexperimente** lassen sich durch **Baumdiagramme** veranschaulichen. Jeder Pfad des Baumdiagrammes stellt dabei ein einzelnes Versuchsergebnis des Gesamtexperimentes dar.

$\Rightarrow$ Beim **Ziehen mit Zurücklegen** (mit Wiederholung) sind bei jeder Stufe alle Versuchsergebnisse möglich. Die Ergebnisse der vorhergehenden Stufe sind dabei unerheblich.

$\Rightarrow$ Beim **Ziehen ohne Zurücklegen** (ohne Wiederholung) wird die Auswahlmenge jedesmal um die bereits gezogenen Stücke reduziert.

Stochastik - Kapitel 1

2. Ereignis und Ereignisraum; Ereignisalgebra

Oft ist nicht dass spezielle Versuchsergebnis ω interessant, sondern nur die Frage, ob eines von mehreren vorgegebenen Ereignissen eintritt.

Beispiele zu Ereignissen und Ereignisräumen:

1. Beim Werfen eines Würfels, können die Zahlen 1,2,3,4,5 oder 6 fallen. Die Ergebnismenge lautet somit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Der Spieler 1 wettet, dass beim einmaligen Werfen eine gerade Augenzahl fällt. Er setzt folglich auf das Ereignis
$A = \{2,4,6\}$.

Spieler 1 gewinnt, falls bei einmaligem Werfen des Würfels eine Augenzahl aus A fällt. Welche Zahl es ist, spielt keine Rolle.

$\Rightarrow$ Jede Teilmenge A des Ergebnisraumes Ω nennt man ein **Ereignis**.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $A \subseteq \Omega$ (sprich: „A ist Teilmenge von Omega“)

$\Rightarrow$ Das Ereignis A **tritt** immer dann **ein**, wenn das bei der Durchführung des Versuchs eintretende Ergebnis ω Element von A ist.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $\omega \in A$ (sprich: „Klein-Omega ist Element von A“)
$\Rightarrow$ Ist das Versuchsergebnis kein Element von A, dann **tritt** A **nicht ein**.
$\Rightarrow$ Man schreibt: $\omega \notin A$ (sprich: „Klein-Omega ist nicht Element von A“)

2. Beim Roulette kann man auf die Zahlen 0,1,2,3,……,36 setzen. Hier lautet die Ergebnismenge also $\Omega = \{0,1,2,3.....,36\}$.

Die Spielbank selbst gewinnt nur, wenn die Zahl 0 erscheint. Für sie ist also nur das Ereignis E = $\{0\}$ interessant.

$\Rightarrow$ Dieses Ereignis nennt man **Elementarereignis.**
Es ist dadurch gekennzeichnet, dass es nur aus einem einzigen Versuchsergebnis besteht und folglich auch nicht mehr weiter zerlegbar ist.

$\Rightarrow$ Die Menge aller Ereignisse bezeichnet man als **Ereignisraum** $P(\Omega)$.

Stochastik - Kapitel 1

3. Wieder wirft ein Spieler einen Würfel.
Wir wissen bereits, dass die Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist.
Die einzelnen Elementarereignisse lauten: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

B_1 : „Es fällt irgendeine Augenzahl, aber nicht die Zahl 6“
$B_1 = \{1,2,3,4,5\}$

B_2 : „Es fällt eine Augenzahl die prim ist“
$B_2 = \{2,3,5\}$

B_3 : „Es fällt eine Augenzahl die größer ist als 7“
$B_3 = \{\ \} = \varnothing$

B_4 : „Es fällt eine Augenzahl die kleiner ist als 10“
$B_4 = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

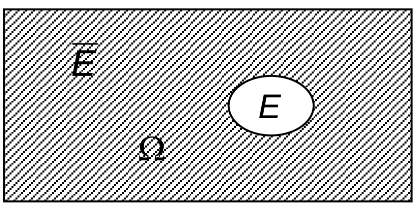
$\Rightarrow$ Ein Ereignis das niemals eintritt heißt **unmögliches Ereignis.**
Es gilt $B = \varnothing$ (sprich: „B ist leere Menge“), z.B. im Fall B_3.

$\Rightarrow$ Ein Ereignis, das bei jeder Durchführung eintritt heißt **sicheres Ereignis.**
Es gilt $B = \Omega$, z.B. im Fall B_4.

4. Ein Roulettespieler setzt auf „Ungerade“ und möchte deshalb, dass das Ereignis $E = \{1,3,5,....,35\}$ fällt. Er verliert seinen gesamten Einsatz, falls das Ereignis $\overline{E} = \{0,2,4,...,36\}$ eintritt.

$\Rightarrow$ Ereignisse, die in ihrer Bedeutung jeweils entgegengesetzt sind nennt man **Gegenereignisse oder Komplementärereignisse.**

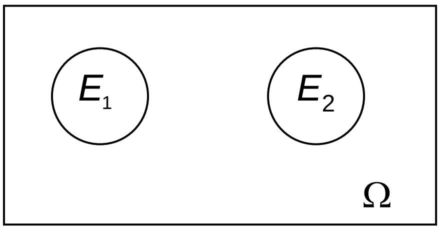
$\Rightarrow$ $\overline{E}$ umfasst alle Ergebnisse ω aus der Ergebnismenge Ω des Zufallsversuchs, die nicht in E enthalten sind. $\overline{E}$ ist deshalb folglich die Restmenge $\overline{E} = \Omega \setminus E$ (sprich: „Nicht - E ist gleich der Ergebnisraum Omega ohne E“).



Stochastik - Kapitel 1

5. Ein Roulettespieler setzt einen Chip auf „Rot“ und einen weiteren auf die Farbe „Schwarz“. Es ist einleuchtend, dass der Spieler nicht mit beiden Chips gewinnen kann. Sobald eine rote Zahl gefallen ist, schließt dieses Ereignis das Fallen einer schwarzen Zahl aus, bzw. umgekehrt.

$\Rightarrow$ Man sagt, dass die zwei Ereignisse E_1 und E_2 **unvereinbar (disjunkt)** sind.
Das bedeutet, dass kein Ergebnis ω existiert, das Element in beiden Ereignissen ist.
Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ist immer die leere Menge $\varnothing$.



$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

(sprich: „E_1 geschnitten E_2 ist leere Menge“)

$\Rightarrow$ **Gegenereignisse sind immer unvereinbar.**

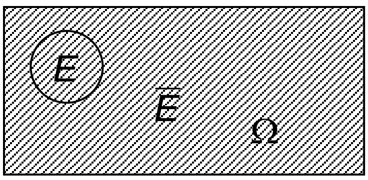
Merke: Der Durchschnitt zweier Ereignisse $A \cap B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$ tritt dann ein, wenn gleichzeitig beide Ergebnisse eintreten („A und B treten ein“).

6. Beim Roulette setzt ein Spieler auf das Ereignis „eine ungerade Zahl fällt“ und gleichzeitig auf die Zahlen 1,2,….12.
Er kann somit gewinnen, wenn entweder eine ungerade Zahl *oder* eine der Zahlen zwischen 1 und 12 fällt.

Für ihn günstig ist also deshalb:
$E = \{1,3,...,35\} \cup \{1,2,...,12\} = \{1,...,12,13,15,...35\}$
$E = E_1 \cup E_2 \rightarrow E$ ist die **Vereinigungsmenge** aus E_1 und E_2.

$\Rightarrow$ Wenn E_1 und E_2 .Ereignisse desselben Zufallsexperimentes sind, dann versteht man unter dem Ereignis E „E_1 **oder** E_2“ die **Vereinigungsmenge** der beiden Ereignisse.

$\Rightarrow$ Für Gegenereignisse gilt:



$$E \cup \overline{E} = \Omega$$

Merke: Die **Vereinigung** $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$ tritt dann ein, wenn mindestens **eines** der beiden Ergebnisse eintritt („A oder B tritt ein“).

Stochastik - Kapitel 1

Wir haben jetzt die **Verknüpfungsoperationen „ $\overline{}$, $\cup$, $\cap$ “** kennen gelernt und gehen nun noch einen Schritt weiter.
Für die Ereignisse $A,B,C \in P(\Omega)$ können wir anhand der Verknüpfungen die folgenden Gesetze der **Ergebnisalgebra** anwenden.

$\Rightarrow$ ***Kommutativgesetze:***

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$

$\Rightarrow$ ***Assoziativgesetze:***

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow$ ***Distributivgesetze:***

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow$ ***Gesetze von De-Morgan:***

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \qquad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\Rightarrow$ ***Komplemente:***

$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad \overline{\overline{A}} = A \qquad A \cup \overline{A} = \Omega$

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 1

1. Andrea, Benjamin und Corinna möchten sich auf drei Stühle setzen. Davor überlegen sie sich aber, wie viele Möglichkeiten sie haben.
Hilf ihnen dabei und zeichne zur besseren Veranschaulichung ein Baumdiagramm.

2. Peter hat einen roten, einen blauen und zwei gelbe Holzklötze. Aus drei Steinen baut er nun einen Turm.
- **a)** Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es um einen solchen Turm zu bauen ? Zeige das Ergebnis anhand eines Baumdiagrammes.
- **b)** Wie viele Möglichkeiten hat Peter wenn er aus allen vier Holzklötzen einen Turm baut ?

3. Die Klasse 5a veranstaltet eine Kinder-Disco. Sie haben dafür drei nebeneinander angebrachte Scheinwerfer organisiert. Vor jedem der Scheinwerfer wollen die Klassensprecher eine farbige Folie anbringen um möglichst tolle Lichteffekte zu erreichen. Dazu stehen ihnen drei blaue und drei rote Folien zur Verfügung.
- **a)** Wie viele Möglichkeiten haben die Klassensprecher die Scheinwerfer mit den Folien zu versehen ?
- **b)** Der Lehrer organisiert noch zusätzlich drei grüne Folien. Wie viele Möglichkeiten, den Scheinwerfer damit zu versehen gibt es jetzt ?

4. Man wirft eine Münze dreimal. Bestimme
- **a)** die folgenden Ereignisse:
  A: genau zweimal tritt Kopf auf;
  B: höchstens einmal tritt Zahl auf;
  $A \cap B$;
  $A \cup B$;
  $A \cap \overline{B}$;
- **b)** das Komplementärereignis von $\{(K,K,K)\}$.

5. Eine Urne enthält zwei weiße, zwei schwarze und eine rosafarbene Kugel.
Aus ihr werden
- **a)** mit
- **b)** ohne zwischenzeitliches Zurücklegen drei Kugeln gezogen.
  Stelle für a) und b) folgendes Ereignis dar: es befinden sich zwei rosafarbene Kugeln unter den gezogenen Kugeln.

6. Man wirft fünf Würfel und interessiert sich nur
- **a)** für die Augensumme;
- **b)** für die Anzahl der Sechsen.
  Gesucht ist jeweils die geeignete Ergebnismenge Ω.

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 1

7. Aus der Menge der Buchstaben $\{t,p\}$ werden auf gut Glück drei Buchstaben (mit Zurücklegen) zu einem „Wort“ zusammengesetzt.
Schreibe die folgenden genannten Ereignisse als Teilmenge von Ω.

a) E_1 : „Der 2. Buchstabe ist t.“

b) E_2 : „Nur der 2. Buchstabe ist t.“

c) E_3 : „Höchstens ein Buchstabe ist t.“

d) E_4 : „Mindestens ein Buchstabe ist t.“

e) E_5 : „Der 1. Buchstabe ist t oder der letzte Buchstabe ist t.“

f) E_6 : „Entweder der 1. Buchstabe ist t oder der letzte ist t.“

8. Ein Elektrogeschäft hat drei PC´s einer bestimmten Marke auf Lager. Bevor die Geräte zum Verkauf angeboten werden, müssen sie auf ihre Funktionstüchtigkeit überprüft werden.
A_1, A_2, A_3 seien die Ereignisse, dass die Geräte 1,2 oder 3 defekt sind.
Beschreibe durch A_1, A_2, A_3 die folgenden Ereignisse.

a) alle PC´s sind defekt.

b) mindestens ein PC ist defekt.

c) der erste PC ist defekt.

d) alle PC´s funktionieren ordnungsgemäß.

e) höchstens ein PC ist defekt.

f) genau zwei PC´s sind funktions**un**tüchtig.

9. Hans wirft dreimal hintereinander mit einem Ball auf eine Dose. Wir unterscheiden nur zwischen Treffer T und Nichttreffer N.

a) Gib den Ergebnisraum Ω an und zeichne ein Baumdiagramm.

b) Schreibe die Folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω.

E_1 : „Mindestens ein Wurf ist ein Treffer.“

E_2 : „Höchstens ein Wurf ist ein Treffer.“

E_3 : „Genau ein Wurf ist ein Treffer.“

E_4 : „Der erste Wurf ist ein Treffer.“

E_5 : „Ein Wurf ist ein Nichttreffer.“

E_6 : „Nur der erste Wurf ist ein Treffer.“

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

1. Gib jeweils den Ergebnisraum an:

a) Es werden zwei Münzen geworfen (Kopf = K, Zahl = Z)

b) Aus den Ziffern 2,4,5,7 werden zweistellige Zahlen gebildet. Keine Ziffer soll darin zweimal auftreten.

c) Aus einer Urne mit 4 grünen und 2 rosafarbenen Kugeln werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

d) Aus derselben Urne werden nochmals die in c) genannten Kugeln gezogen. Dieses Mal allerdings mit der Methode ohne Zurücklegen.

2. In einer Mathematikschulaufgabe stellt der Lehrer vier Aufgaben 1,2,3,4. Die Schüler müssen davon zwei Aufgaben bearbeiten.
Zu den folgenden Ereignissen ist jeweils die dazugehörige Teilmenge von Ω gesucht, wenn die Reihenfolge der Bearbeitung nicht unterschieden wird.
Gib diese Teilmengen an.
Nenne außerdem zu jedem der Ereignisse das Gegenereignis.

a) E_1: „Die Aufgabe 1 muß bearbeitet werden."

b) E_2 : „Ist eine der bearbeiteten Aufgabennummern gerade, dann muß die andere Aufgabennummer ungerade sein."

c) E_3 : „Es muß mindestens eine ungerade Aufgabennummer bearbeitet werden."

d) E_4 : „Es müssen nur gerade Aufgabennummern bearbeitet werden."

3. Es sind drei Ereignisse A, B, C gegeben. Es trete(n)

a) nur C ein.

b) mindestens ein Ereignis ein.

c) höchstens zwei Ereignisse ein.

d) genau zwei Ereignisse ein.

e) keines der Ereignisse ein.

f) mindestens ein Ereignis nicht ein.

Stelle diese Ereignisse a) – f) durch A, B, C dar.

4. Von 25 Schülern belegen fünf weder den Grundkurs Deutsch noch den Grundkurs Bio. Elf Schüler nehmen am Grundkurs Bio teil, drei Schüler belegen alle beide Kurse.
Wie viele Schüler belegen dann den Grundkurs in Deutsch ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

5. Aus einer Urne mit vier rosafarbenen und zwei silbernen Kugeln werden mit verbundenen Augen zwei Kugeln gezogen.
Zwei verschiedene Arten des Vorgehens sollen dabei ausprobiert werden:

a) Man zieht mit beiden Händen.

b) Man zieht nur mit einer Hand.

Nenne alle Fälle die auftreten können.

6. Einige Freunde spielen folgendes Spiel: Jeder Mitspieler wirft zunächst einmal einen Würfel, danach eine Münze. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die höchste Augenzahl gewürfelt hat. Im Falle eines Gleichstandes zwischen mehreren Mitspielern gewinnt derjenige, der beim Münzwurf „Zahl“ geworfen hat.

Zeichne zu diesem Spiel ein Baumdiagramm.

7. Beim Morsen gibt es keine Buchstaben. Man verwendet nur Punkte für ein kurzes Signal und Striche für ein langes Signal.

Wie viele verschiedene Zeichenfolgen aus Punkten und Strichen kann man aus zwei Zeichen (aus drei Zeichen) bilden ?

8. Ein Fahrradschloss mit einer Zahlenkombination hat 4 Scheiben. Auf jeder dieser Scheiben kann man eine Ziffer von 1-6 einstellen.

a) Wie viele Einstellungsmöglichkeiten gibt es insgesamt ?

b) Stefan kann sein Schloss nicht mehr öffnen, da er seine Geheimnummer vergessen hat. Er kann sich aber noch erinnern, dass die Nummer mit einer 4 beginnt und dass wenigstens eine 1 darin vorkommt. Außerdem weiß Stefan noch, dass nur zwei nebeneinander stehende Ziffern identisch sind.

Welche Ziffernkombinationen kommen nur für Stefans Schloss in Frage ?
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten sind es ?

9. Hans hat drei Bücher geschenkt bekommen: **F**ünf Freunde, **H**arry Potter und **K**ickers.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann er seine drei Bücher im Regal anordnen ? Zeichne ein Baumdiagramm zur besseren Übersicht.

10. Kathrin möchte ihr Deutsch-, Englisch- und Biologiebuch im Regal deponieren.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es um die Bücher nebeneinander zu stellen ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 1 - Teil 2

11. Für ein Gartenfest sollen zwei grüne und zwei rote Lampions in einer Reihe aufgehängt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten die Lampions anzubringen gibt es ? Zeichne ein Baumdiagramm dazu.

12. Ein Autohersteller verkauft ein Sondermodell in drei unterschiedlichen Ausführungen: Normal (N), Luxus (L) und Super (S). Alle Modelle sind in den Farben weiß und blau und mit drei verschiedenen Motorausführungen erhältlich, nämlich 66kW, 74 kW und 92kW.

Wie viele Fahrzeuge müsste der Händler in seinem Lager stehen haben, damit er alle möglichen Kundenwünsche auf einmal erfüllen könnte ?

13. Frau Braun hat in ihrem Kleiderschrank 4 Blusen, 2 Hosen und 3 Pullover aufgehängt, die alle sehr gut zusammen passen. Sie kann sich nicht entscheiden welche Kleidungsstücke sie miteinander tragen soll.

Wie viele Kombinationsmöglichkeiten besitzt Frau Braun eigentlich insgesamt ?

Stochastik - Kapitel 2

Aufgaben ab Seite 7

2. Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und Laplace-Experimente

2.1 Die absolute und die relative Häufigkeit

1. Beispiel:

Ich werfe 50mal einen Würfel und möchte herausfinden, wie oft jeweils die Augenzahl 1,2,3,4,5 und 6 eintritt. Dazu mache ich mir eine Strichliste oder eine kleine Tabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7	6	10	9	8	10

Jetzt frage ich mich, wie oft ein bestimmtes Ergebnis, z.B. die „5“ aufgetreten ist ?
⇒ **absolute Häufigkeit** von „5“

Außerdem interessiert mich noch, wie oft dieses Ergebnis „5“ im Verhältnis zur Gesamtzahl der 50 Würfe aufgetreten ist.
⇒ **relative Häufigkeit** von „5“

Die kleine Tabelle von oben lässt sich nun erweitern:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	7	6	10	9	8	10
Relative Häufigkeit	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{10}{50}$

Merke:

- Die **absolute Häufigkeit** gibt an, wie oft ein *bestimmtes* Ergebnis auftritt.
- Die **relative Häufigkeit** gibt an, wie oft ein bestimmtes Ergebnis im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Durchführungen vorkommt.
- Die **relative Häufigkeit** gibt also an, wie groß der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl der Durchführungen des Zufallsexperimentes ist.

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl der Durchführungen}} = h_n(A) = \frac{k}{n}$$

- Die relative Häufigkeit wird meistens in Prozent oder als Dezimalbruch angegeben.

Stochastik - Kapitel 2

- „$\mathbf{h_n(A)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$" bezeichnet man als die **relative Häufigkeit des Ereignisses A bei n Versuchen.**
  (*Anmerkung: für das kleine „h“ wird in der Literatur häufig auch ein „r“ verwendet)*
- „**k“** nennt man die **absolute Häufigkeit bei n Versuchen.**

2. Beispiel:

Eine Münze wird 20 mal geworfen. Es fällt dabei 11 mal „Zahl“.
Das Ereignis A lautet nun: „Es fällt Zahl“.
Die absolute Häufigkeit heißt dann: $k = z(A) = 11$

Die relative Häufigkeit berechnet sich folgendermaßen: $h_{20} = \dfrac{k}{n} = \dfrac{11}{20} = 0{,}55 = 55\%$

Stochastik - Kapitel 2

2.2 Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten

Bei der Durchführung eines Zufallsexperimentes sagt man, dass ein einzelnes Ereignis eine bestimmte „Chance“ hat aufzutreten.
In der Mathematik spricht man aber nicht von Chancen, sondern von **„Wahrscheinlichkeiten“**.
Diese Wahrscheinlichkeiten gibt man als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozent an $\left(\frac{1}{4}; 0{,}25; 25\%\right)$.

Natürlich können wir bei der Durchführung eines Zufallsexperimentes das genaue Ergebnis nicht vorhersagen. Wir erwarten aber automatisch, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses von den Bedingungen des Experimentes abhängig ist.
Z. B. rechnen wir damit, dass ein Würfel „korrekt“ geformt ist und alle Seiten die gleiche Fläche besitzen. Werfen wir einen solchen „fairen“ Würfel beliebig oft, dann erwarten wir, dass in ungefähr $\frac{1}{6}$ aller Würfe die Augenzahl 3 fällt.

Merke:

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft ausgeführt, dann stabilisieren sich für jedes Ergebnis die relativen Häufigkeiten, d.h. sie pendeln sich um einen bestimmten Wert ein. Wir erwarten, dass dieser Wert nahe bei der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses liegt.
(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)

Beispiel:
Beim 1300-maligen Werfen eines Lego-Steines dessen Seiten mit den Ziffern 1 bis 6 markiert wurden (unterschiedlich große Grundflächen) erhalten wir die nachfolgende Tabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	151	17	585	403	15	129
Relative Häufigkeit	$\frac{151}{1300}$ $=11{,}6\%$	$\frac{17}{1300}$ $=1{,}3\%$	$\frac{585}{1300}$ $=45{,}0\%$	$\frac{403}{1300}$ $=31{,}0\%$	$\frac{15}{1300}$ $=1{,}2\%$	$\frac{129}{1300}$ $=9{,}9\%$

$\Rightarrow$ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse eines Zufallsversuches, d.h. die Summe aller relativen Häufigkeiten, ist immer 1 (=100%).

Im Beispiel: $\frac{151}{1300}+\frac{17}{1300}+\frac{585}{1300}+\frac{403}{1300}+\frac{15}{1300}+\frac{129}{1300}=\frac{1300}{1300}=1$

Stochastik - Kapitel 2

2.3 Die Pfadregeln

Im 1. Kapitel haben wir bereits gelernt, dass man zur Veranschaulichung von **mehrstufigen Zufallsexperimenten** ein Baumdiagramm zeichnet und die einzelnen Wahrscheinlichkeiten jeweils an den Ästen des Baumes notiert.

Merke:

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Pfade die zu diesem Ereignis gehören addiert.

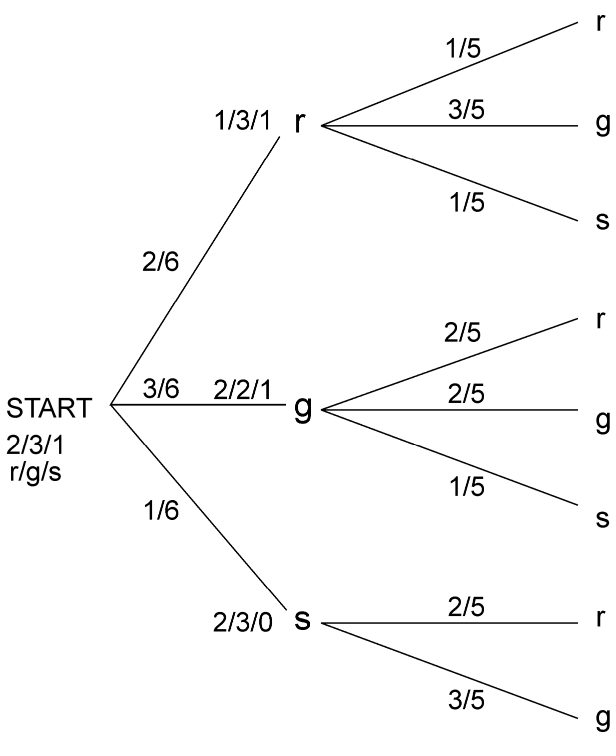
Anmerkungen zum folgenden Beispiel:

⇒ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die vom Verzweigungspunkt ausgehen, ist immer 1.
(Im Beispiel: $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1$)

⇒ Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist stets 1.
(Im Beispiel: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{6}{30}+\frac{3}{30}+\frac{2}{30}+\frac{3}{30}=1$)

Beispiel:

Eine Urne enthält 6 Kugeln: 2 **r**osafarbene, 3 **g**raue und 1 **s**chwarze.
Wir ziehen zwei Kugeln ohne Zurücklegen.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse.



$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{30}$

$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{30}$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{30}$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{30}$

Stochastik - Kapitel 2

2.4 Laplace-Experimente und Laplace-Wahrscheinlichkeit

⇒ Wenn wir beispielsweise eine Münze werfen, sind wir uns mit unserer Wahrscheinlichkeitsangabe sehr sicher.
Die Münze landet auf der Seite „Kopf“ und auf der Seite „Zahl“ jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%.

⇒ Auch beim Werfen eines normalen Spielwürfels sagen wir, dass jede Augenzahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, nämlich mit $\frac{1}{6} \approx 16,7\%$ fällt.

⇒ Bei Glücksrädern, die gleich große Felder besitzen und auch beim Ziehen von verschieden farbigen Kugeln aus einer Urne, zweifeln wir nicht daran, dass die Ergebnisse alle gleich wahrscheinlich sind.

Merke:

- Es gibt Experimente, bei denen wir annehmen können, dass alle Ergebnisse eines Zufallsversuches mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

- Bei n Ergebnisse beträgt die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses somit $\frac{1}{n}$.

In solchen Fällen spricht man von **Laplace-Wahrscheinlichkeiten.**

- Für die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses A gilt dann:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}}}$$

1. Beispiel:

Ein Würfel wird zweimal geworfen.
Wie wahrscheinlich ist es, dass zweimal die Augenzahl 6 erscheint ?

Das Ereignis A lautet folglich: „Zweimal wird die 6 geworfen.“
$A = \{6\ 6\}$; $|A| = 1$ (es gibt eine Möglichkeit. Die Reihenfolge kann man hier nicht unterscheiden, da es sich um die gleiche Zahl handelt.)

Der Ergebnisraum Ω, also alle Fälle die auftreten können (die möglich sind), sieht so aus:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$; $|\Omega| = 6^2 = 36$

Nach diesen Überlegungen können wir jetzt P(A) berechnen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36};$$

Stochastik - Kapitel 2

2. Beispiel:

Der Würfel wird wieder zweimal geworfen.
Wie wahrscheinlich ist es nun, dass eine 6 und eine 5 erscheinen?

Ereignis B: „Es fällt eine 6 und es fällt eine 5.“
$B = \{5\,6,\ \ 6\,5\}$; $|B| = 2$ (Es gibt zwei Möglichkeiten. Die 5 kann im ersten oder im zweiten Durchgang geworfen werden. Für die 6 gilt logischerweise das gleiche.)

Alle Fälle die auftreten könnten, lauten immer noch $|\Omega| = 6^2 = 36$,
Jetzt kann man wieder P(B) berechnen:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36};$$

3. Beispiel:

Wieder werfen wir den Würfel zweimal.
Wie wahrscheinlich ist es, dass die Augen<u>summe</u> 4 fällt ?

Ereignis C: „Die Augensumme soll 4 betragen.“
$\boldsymbol{C} = \{1\,3,\ 3\,1,\ 2\,2\}$; $|\boldsymbol{C}| = 3$ (Es gibt drei Möglichkeiten. Die 3 kann im ersten und darauf folgend die 1 im zweiten Durchgang geworfen werden oder umgekehrt. Die Augensumme 4 erreiche ich auch durch das zweimalige Werfen der Zahl 2. In diesem Fall ist keine Unterscheidung der Reihenfolge möglich.)
Unser Ergebnisraum ist immer noch der gleich wie in den beiden voran gehenden Beispielen.

Darum errechnen wir für P(C):

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{36};$$

4. Beispiel:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei zweimaligem Werfen des Würfels eine Differenz der Augenzahlen die 2 beträgt ?

$$D = \{5\,3,\ 3\,5,\ 6\,4,\ 4\,6,\ 3\,1,\ 1\,3,\ 4\,2,\ 2\,4\};\ |\boldsymbol{D}| = 4 \cdot 2 = 8$$

Für P(D) erhalten wir:

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{8}{36};$$

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 1

1. Ein Kartenspiel hat folgende Karten: 7 8 9 10 **B**ube **D**ame **K**önig **A**s.
Sie existieren jeweils in der Farbe rot (Herz und Karo) und auch in der Farbe schwarz (Kreuz und Pik). Insgesamt also 32 Spielkarten.

Es wird nun eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Karte

a) eine Dame oder ein König ?

b) schwarz oder eine Zahl ?

c) rot oder schwarz ?

d) rot oder Karo ?

e) keine rote Zahl ?

f) ein roter Bube ?

g) rot und schwarz ?

h) ein Bild (B D K A) oder Kreuz ?

2. Die Drehscheibe beim Roulette ist in 37 gleich große Felder unterteilt (Zahlen von 0 bis 36, Annahme: alle Zahlen treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Null auftritt, wenn das Rad nur einmal gedreht wird ?

3. Bei einer Meinungsumfrage zur Rauchgewohnheit wurden die Daten von 55 Frauen und 45 Männern erfasst.
Insgesamt sind 65 dieser befragten Personen Raucher, unter ihnen 35 Frauen.

a) Wie viele der befragten Männer rauchen nicht ?

b) Berechne den relativen Anteil der weiblichen Nichtraucher unter den beiden Geschlechtern.

4. In einer Versuchsreihe vom Umfang n besitzt das Ereignis A die absolute Häufigkeit 60.
Für das Ereignis B beträgt die absolute Häufigkeit 79.
Ausserdem ist die relative Häufigkeit des Ereignisses B um 0,095 größer, als die relative Häufigkeit des Ereignisses A.

Bestimme den Versuchsumfang n.

5. Beim Handball treffen Max mit 40% Wahrscheinlichkeit und Moritz mit 70% Wahrscheinlichkeit ins Tor. Sie werfen nacheinander.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen

a) 0 Treffer

b) einen Treffer

c) zwei Treffer erzielen ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 1

6. Daniela hat in einen Korb mit 6 gekochten (g) Eiern aus Versehen noch 4 rohe (r) Eier dazugelegt. Die Mutter nimmt zum Frühstück 3 Eier heraus.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein rohes Ei dabei ist ?
Zeichne ein Baumdiagramm zur Verdeutlichung.

7. Bestimme die relativen Häufigkeiten

a) aller durch 2 teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

b) der durch 2 und 7 teilbaren Zahlen von 1 bis 1000.

c) der Primzahlen von 1 bis 100.

8. Hans möchte sich ein neues Auto kaufen. In einer Fachzeitschrift hat er gelesen, dass 18% aller zugelassenen PKW aus dem Ausland stammen. Von diesen Autos liefert das Herstellerwerk ABC 19,2%.
Hans möchte nun ausrechnen, wie groß die relative Häufigkeit der PKW dieses Herstellers unter unseren Autos ist. Hilf Hans dabei !

9. In einer Schüssel liegen 20 Bonbons. 8 davon schmecken nach Erdbeere (E), 8 nach Zitrone (Z) und 4 nach Kirsche (K). Alle sind in gleiches Papier eingewickelt und man kann sie deshalb nicht unterscheiden. Der Fruchtgeschmack lässt sich nur durch das Lutschen der Bonbons feststellen.

a) Rudi isst drei Bonbons hintereinander.
1. Ereignis A: „ Jeder Geschmack ist vertreten“
Ereignis B: „ Mindestens zwei Bonbons schmecken nach Kirsche“.
Gib die beiden Ereignisse als Teilmenge von Ω an und berechne P(A) und P(B).
2. Formuliere das Ereignis $\overline{\boldsymbol{B}}$ in Worten und berechne $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{B}})$.

b) Anna isst fünf Bonbons. Jedes mal wenn sie ein Bonbon aus der Schüssel nimmt legt sie dafür eines mit Kirschgeschmack hinein.
Berechne die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $C = \{Z,E,K,K,E\}$.

10. Gegeben sei das Ereignis $\boldsymbol{E}_1$: „Ein neugeborenes Kind ist ein Mädchen.“
Wodurch unterscheiden sich die relative Häufigkeit $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{E}_1) = 0{,}51$ und die Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}_1) = 0{,}51$?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

1. Die gegebene Menge besteht aus den ersten 50 natürlichen Zahlen. Wir wählen zufällig eine Zahl aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausgewählte Zahl durch „6“ oder durch „9“ teilbar ist ?

2. Stell dir vor, dein Vater sei ein begeisteter Lottospieler. Er möchte ausrechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist bei dem System „6 aus 49“ 6 Richtige, 5 Richtige, 4 Richtige oder 3 Richtige zu haben. Hilf ihm dabei !

3. Gemischte Aufgabenstellungen.

a) Wie viele verschiedene Ausgänge sind beim Würfeln mit 4 Würfeln möglich?

b) Wie viele verschiedene Tipps sind beim Fußballtoto möglich, wenn man die tatsächlichen Gewinnchancen der Mannschaften <u>nicht</u> berücksichtigt? (Man kann bei diesem Spiel 11 Reihen mit je drei Möglichkeiten tippen, 11er Wette)

c) Auf einer großen Tagung werden insgesamt 18 Vorträge bzw. Reden gehalten. 3 davon finden jeweils parallel statt. Wie viele Möglichkeiten hat ein Tagungsteilnehmer, um sich sein persönliches Tagesprogramm zusammen zu stellen ?

4. Gegeben sind die Ziffern 3, 4, 5. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat man nun, aus diesen Zahlen 3 -Tupel zu bilden ? (Das bedeutet ganz einfach, auf wie viele verschiedene Arten man die Ziffern 3, 4 und 5 anordnen kann.)

5. Du wirfst einen Würfel viermal. Wie viele Ausgänge gibt es zu dem Ereignis E „Alle Würfel zeigen eine unterschiedliche Augenzahl an“ ?

6. Es beteiligen sich 10 Schüler an einem Schwimmwettbewerb. Wie viele Möglichkeiten gibt es den ersten, zweiten oder den dritten Platz zu belegen ?
Und wie viele Ausgänge des Wettbewerbs sind insgesamt überhaupt möglich ?

7. Du befindest dich im Wartezimmer eines Arztes. Außer dir sind noch k andere Personen anwesend. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestes eine der Personen mit dir am gleichen Tag Geburtstag hat ?

8. Eine Person ordnet 5 Gegenstände beliebig an. Ein so genannter „Hellseher“ soll nun sagen, in welcher Reihenfolge die erste Person die 5 Gegenstände angeordnet hat.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der „Hellseher“ die Reihenfolge korrekt errät ?

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

9. In einer Urne befinden sich 3 schwarze, 2 weiße und 4 grüne Kugeln. Man zieht zweimal ohne Zurücklegen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für

a) E_2 „Es werden 2 weiße kugeln gezogen“

b) E_3 „Es werden 2 grüne Kugeln gezogen“.

10. Ein Ehepaar hat 5 Söhne und keine Tochter. Wir setzen voraus, dass die Geburt eines Sohnes und eine Tochter gleichwahrscheinlich sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dann eine derartige „Zusammensetzung“ einer Familie auf ?

11. Von den Zahlen 1,2,3,…,10 wählt Peter zufällig eine Zahl aus.
Stelle folgende mögliche Ereignisse dar:

A: es wird eine Primzahl ausgewählt.

B: die ausgewählte Zahl ist gerade.

C: die Zahl, die Peter auswählt ist durch 3 teilbar.

$A \cap B$

$A \cap B \cap C$

$A \cap \overline{C}$

$\overline{A \cup B}$

12. In einem Laplace Experiment sucht Hans aus den Zahlen 1,2,3,….1000 zufällig eine aus.
Er möchte diese Ereignisse untersuchen:

A: die gewählte Zahl ist ein Vielfaches von 3.

B: die gewählte Zahl ist ein Vielfaches von 6.

C: die Zahl ist ein Vielfaches von 7.

Hans will die folgenden Wahrscheinlichkeiten berechnen. Hilf ihm dabei !
$A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C.$

13. Aus einem Skat-Kartenspiel (gesamt 32 Karten) wählen wir eine Karte zufällig aus.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: die gewählte Karte ist ein Kreuz (8 Karten sind Kreuz);

B: bei der gewählten Karte handelt es sich um einen Buben (4 Karten sind Buben);

C: die gewählte Karte ist ein Kreuz oder ein Bube.

Stochastik

Aufgaben zu Kapitel 2 - Teil 2

14. Susi hat die Geheimnummer ihres fünfstelligen Zahlenschlosses für ihr Fahrrad vergessen. Sie kann sich nur noch daran erinnern, dass alle vorkommenden Ziffern größer als 4 sind und dass genau zwei der Ziffern gleich 9 sind.

Wie viele Zahlenkombinationen dieser Art gibt es ?

15. In einer Packung mit Tulpenzwiebeln findet Anna fünf rote, drei weiße und zwei rosarote Setzlinge. Sie pflanzt diese 10 zufällig in einer Reihe an.

a) Wie viele Aussaatmöglichkeiten hat Anna dabei ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die Tulpen die die gleiche Farbe haben jeweils nebeneinander ?

16. Unter 25 Schülern werden 4 Theaterkarten zufällig ausgelost. Jeder Schüler darf bei dieser Auslosung aber höchstens eine Karte gewinnen.

Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es, falls die Plätze

a) nummeriert sind ?

b) keine Nummern haben ?

17. 10 Personen spielen zusammen ein Spiel. Dabei wird bei jedem Durchgang eine Person ausgelost, die ausscheiden muß. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden beiden Ereignisse.

a) das Ehepaar Huber bleibt vor der letzten Auslosung im Spiel.

b) Herr Huber ist die letzte Person die übrig bleibt.

18. Eine Hausfrau hat einen Karton Eier gekauft. Sie hat dabei nicht gesehen, dass davon 2 Eier verdorben sind. Zum Kuchen backen wählt sie anschließend 3 Eier zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt <u>keines</u> der verdorbenen Eier in den Kuchen ?

19. Bestimme die Anzahl aller genau dreistelligen Zahlen, deren Ziffern sich jeweils alle voneinander unterscheiden.

20. Aus 10 Lehrern, 8 Lehrerinnen und 20 Schülern sollen 1 Lehrer, 1 Lehrerin und 2 Schüler für den SMV-Ausschuß gewählt werden.

Auf wie viele verschiedene Arten ist diese Wahl möglich, wenn

a) jeder delegiert / gewählt werden kann ?

b) eine ganz bestimmte Lehrerin gewählt werden muß ?

c) 2 der zur Verfügung stehenden Lehrer und 5 der zur Verfügung stehenden Schüler <u>nicht</u> gewählt werden können ?

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben ab Seite 8

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes

Beispiel zum Einstieg in das Thema:

Peter wirft zwei Würfel. Danach möchte er Folgendes berechnen:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme beim Werfen der zwei Würfel mindestens 8 beträgt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens die Augensumme 8 zu erreichen, wenn Peter von Anfang an weiß, dass einer der Würfel eine 4 zeigen wird ?

Erklärung:

Der Ergebnisraum Ω umfasst folgende Ereignisse:

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Das Ereignis **A** „die Augensumme beträgt mindestens 8“ sieht folgendermaßen aus:

					(2;6)
				(3;5)	(3;6)
			(4;4)	(4;5)	(4;6)
		(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Für das Ereignis **B** „ Einer der Würfel zeigt die Zahl 4“ ergibt sich:

			(1;4)		
			(2;4)		
			(3;4)		
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
			(5;4)		
			(6;4)		

Stochastik - Kapitel 3

Nun können wir die Teilaufgabe a) ganz leicht beantworten:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{36}$$

Alle möglichen Zahlenkombinationen, die beim Werfen von zwei Würfeln eintreten können sehen wir an der Ergebnismenge. Es gibt 36 verschiedene Kombinationen.
Für das Ereignis **A** kommen davon allerdings nur 15 in Frage, da nur sie die Bedingung „die Augensumme beträgt mindestens 8“ erfüllen.

Zum Lösen der Teilaufgabe b) gehen wir nun genauso vor:

$$P(B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{11}$$

Es gibt 11 mögliche Wurfkombinationen, bei denen eine Zahl eine 4 ist.
Nur 5 von diesen 11 Kombinationen erfüllen allerdings auch die 2. Bedingung „die Augensumme muß mindestens 8 betragen“.

Man verwendet für die Teilaufgabe b) folgende Schreibweise: $P(A|B)$.

MERKE:

Diese Bezeichnung sagt aus, dass das Ereignis A, unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetroffen ist, auftritt.

$P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A unter der Bedingung B.

Analog für das Eintreten des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetroffen ist, gilt:

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Im 2. Kapitel haben wir bereits die 1. und 2. Pfadregel kennen gelernt.

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$ (1. Pfadregel)

$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$ (2. Pfadregel)

Mit ihrer Hilfe kann man nun folgern:

$$\Rightarrow P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

Stochastik - Kapitel 3

Wenn wir in der 2. Pfadregel A mit B vertauschen, dann erhält man:

(x) $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$.

Dabei ist :

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ (A *und* $\overline{A}$ sind unvereinbar),

$A \cup \overline{A} = \Omega$

Aus der Pfadanalyse in den vorherigen Kapiteln ist jetzt die folgende Verallgemeinerung der obigen Formel (x) klar:

Sind die Ereignisse $A_1,\ A_2, \dots, A_n$ paarweise unvereinbar $\left(A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j\right)$ und $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, dann gilt:

(⊕) $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)$

„die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit“

Eine andere Schreibweise für (⊕):

(⊗) $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$

stets gilt: $P(A_i|B) \cdot P(B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

nehmen wir jetzt an, daß $P(B) \neq 0$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Benutzt man den Ausdruck (⊗) für $P(B)$, dann gilt auch:

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}}$$

Das ist die **Formel von Bayes**

Stochastik - Kapitel 3

Beispiel:

Die kleine Petra fährt an 50% ihrer Kindergartentage mit dem Bus. In 70% der Fälle erreicht sie so pünktlich den Kindergarten. Durchschnittlich kommt der Bus allerdings nur an 60% der Tage rechtzeitig zum Beginn an. Heute erscheint Petra pünktlich.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie den Bus benutzt ?

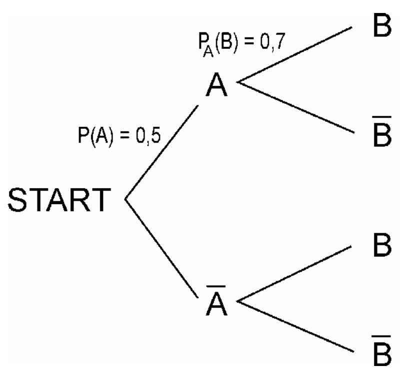
Ereignis **A** sei: „Fahrt mit dem Bus"
Ereignis **B** sei: „Pünktliche Ankunft am Kindergarten"

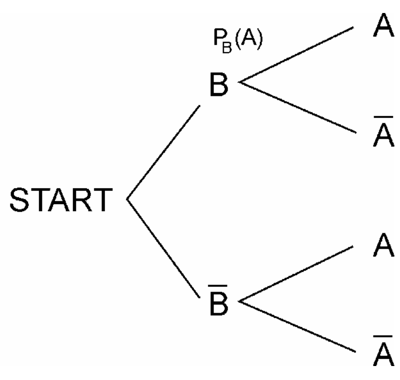
Wir suchen $P_B(A)$, also die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses **A** unter der Bedingung **B.**

Anders gesagt: Das Ereignis **B** ist eingetreten; wie wahrscheinlich ist dann das Eintreten des Ereignisses **A** ?

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}6} = 0{,}5833 \quad \hat{=} \quad 58{,}33\%$$

Zur Verdeutlichung schauen wir uns die beiden nachstehenden Ereignisbäume an:





Stochastik - Kapitel 3

3.2 Die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Beispiel zur Einführung in das Thema:

Klaus spielt mit seinen Freunden Skat.
Er zieht aus dem Skatblatt zufällig eine Karte und schaut sie sich an. Seinen Mitspielern verrät er das Ergebnis nicht.
A sei „die gezogene Karte ist ein Bube“.
Für Klaus´ Mitspieler ergibt sich dann:

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Das ist die **absolute Wahrscheinlichkeit** für A**.**
(Es liegt ihnen keine Information vor)

> Ein Skatspiel (französisches Blatt) hat 32 Spielkarten. Davon 16 rote (Herz + Karo) und 16 schwarze (Kreuz + Pik).
>
> Die acht verschiedenen Kartenwerte sind 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As.
>
> Wenn man nur die aufgedruckten Farben rot bzw. schwarz berücksichtigt, enthält das Skatspiel nun jeweils 2 rote und 2 schwarze Buben, Damen, Könige, … usw.
>
> Insgesamt enthält das Skatspiel je 4 Buben, Damen, Könige, … usw.

a) Klaus verrät nun, dass er eine rote Karte gezogen hat (Ereignis R). Da die Mitspieler nun diese Information haben, kann man Aussagen über die **bedingte Wahrscheinlichkeit** treffen:

$$P(A|R) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = P(A).$$

Wir können sehen, dass $P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R);$ $\quad P(A|R) = P(A).$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$$

Die Information, dass Klaus eine rote Karte gezogen hat, ist deshalb für seine Mitspieler wertlos. Das Ereignis A ist **(stochastisch) unabhängig** vom Ereignis R.

Es gilt die **Produktdarstellung**: $P(A \cap R) = P(A|R) \cdot P(R) = P(A) \cdot P(R).$

b) Klaus teilt seinen Mitspielern nun mit, dass er weder ein As, noch eine Zehn (Ereignis B) gezogen hat. Diese Information ist nicht wertlos.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit erhöht sich nun folgendermaßen:

$$P(A|B) = \frac{1}{6} > P(A).$$

Die Produktdarstellung gilt in diesem Fall nicht,
da $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \neq P(A) \cdot P(B).$

$\mathrm{P(B)} = 6/8; \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$

$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A)} = 1/8$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse A und B sind **(stochastisch) abhängig**.

> **MERKE:**
>
> Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch **unabhängig,** wenn die Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses nicht durch das Eintreten des zweiten Ereignisses verändert wird.
> Das ist der Fall, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Stochastik - Kapitel 3

ACHTUNG:

Der Begriff der „Unvereinbarkeit“ zweier Ereignisse darf nicht mit dem Begriff der „Unabhängigkeit“ zweier Ereignisse verwechselt werden.

- „A und B sind unvereinbar“ bedeutet, dass $A \cap B = \{\ \}$. Daraus folgt, dass $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- „A und B sind unabhängig“ ist äquivalent zu $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\Rightarrow$ Sind zwei Ereignisse unvereinbar, dann ist ihre Unabhängigkeit automatisch ausgeschlossen.
Sind A und B unvereinbar, bedeutet dies nämlich, dass sie nicht gemeinsam auftreten können. Die beiden Ereignisse beeinflussen sich also gegenseitig
(Beispiel: Tritt B ein, dann tritt A nicht ein usw.).

MERKE:

Sie die Ereignisse A und B unabhängig, dann ergibt sich, dass auch die folgenden Ereignisse unabhängig sind: A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B, $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

Verdeutlichung anhand einer Vierfeldertafel:

	B	$\overline{B}$	
A	$a \cdot b$	$a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$b(1-a)$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	

Liegen drei Ereignisse A, B und C vor, dann gilt:
A, B, C sind stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad und$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \quad und$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \quad und$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Die Unabhängigkeit von n Ereignissen wird analog definiert, und zwar:

Die Ereignisse A_1, A_2, … , A_n sind unabhängig, wenn für jede Teilmenge

$\{n_1, n_2, ..., n_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ mit $2 \le k \le n$ gilt:

$$P(An_1 \cap An_2 \cap ... \cap An_k) = P(An_1) \cdot P(An_2) \cdot ... \cdot P(An_k)$$

Stochastik - Kapitel 3

3.3 Die Bernoulli-Kette

Bei manchen Zufallsexperimenten interessiert man sich nur dafür, ob ein Ereignis eintritt, oder ob es nicht eintritt.

MERKE:

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur darum geht, ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

Das Eintreffen von A bezeichnet man als **Treffer** bzw. **Erfolg**.
Das Eintreffen von $\overline{A}$ nennen wir **Niete** bzw. **Misserfolg**.

Mit $P(A) = p$ gilt: $P(\overline{A}) = 1 - p$, da $A \cup \overline{A} = \Omega$

MERKE:

Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt und sind die einzelnen Experimente dabei unabhängig voneinander, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette.**
n heißt dabei die **Länge** der Bernoulli-Kette.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A sei in einem Bernoulli-Experiment $P(A) = p$.
Daraus können wir folgern, dass das Ereignis A in der Bernoulli-Kette der Länge n genau k-mal auftritt, und zwar mit folgender Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel zur Verdeutlichung:

Peter nimmt am Wettbewerb im Tontaubenschießen teil. Er hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 3:5.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter bei 3 Schüssen auch 3mal trifft ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft Peter mindestens einmal, wenn er 3 Schüsse zur Verfügung hat ?

Stochastik - Kapitel 3

Lösung:

$p = \frac{3}{5}; \quad N = 3; \quad k = 3;$

Erklärung:

- p ist die Wahrscheinlichkeit mit der Peter trifft. (Er landet quasi bei 5 Versuchen 3 Treffer)
- N ist die Anzahl der Schüsse (Wie oft führt Peter quasi das Experiment „Schuß“ durch ?)
- k ist die Anzahl der Treffer (Wie oft führt der Schuß zum Erfolg ?)

a) $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\Rightarrow \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 0{,}216 \quad \hat{=} \quad 21{,}6\%$$

b) Am einfachsten lässt sich diese Teilaufgabe lösen, wenn wir zunächst das Gegenereignis berechnen.
Wie groß ist also die Wahrscheinlichkeit, dass Peter bei drei Schüssen <u>keinmal</u> trifft ?

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens einmal trifft ist dann folglich:

$$1 - 0{,}064 = 0{,}936 \quad \hat{=} \quad 93{,}6\%$$

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben zu Kapitel 3.1

1. Der Direktor einer Schule fertigt eine Aufstellung über seine 12. Klasse an.
Die Anzahl der Teilnehmer an einem Leistungskurs Deutsch bezeichnet er als Ereignis **A** und die Anzahl der Teilnehmer an einem Leistungskurs Französisch als Ereignis **B**.

Folgende Vierfeldertafel zeichnet sich der Schulleiter zur Verdeutlichung:

	B	$\overline{B}$
A	61	22
$\overline{A}$	19	32

a) Wie viele Schüler umfasst die 12.Klasse insgesamt ?

b) Der Direktor sucht sich zufällig einen Schüler aus und möchte folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$P(A|B);\ P(\overline{A}|B);\ P(A|\overline{B});\ P(\overline{A}|\overline{B});\ P(B|A);\ P(\overline{B}|A);\ P(B|\overline{A});\ P(\overline{B}|\overline{A}).$$

Hilf ihm dabei !

Anmerkung: Ereignis **A** „Der Schüler besucht den Deutschleistungskurs“
Ereignis **B** „Er besucht den Leistungskurs Französisch“

2. Eine Firma fertigt Autoradios in drei verschiedenen deutschen Städten, in der Stadt A werden 25% ihrer Waren hergestellt, in der Stadt B 35% und der Rest in der Stadt C. Leider passieren auch Produktionsfehler. 2% der Radios die in A gefertigt wurden, 2,5% der in B produzierten Geräte und 3% der in C hergestellten Radios sind fehlerhaft.

a) Ein Qualitätsprüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig ein Gerät aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es fehlerhaft ?

b) Der Chef der Firma wählt aus der Gesamtproduktion ein fehlerhaftes Radio aus.
Danach möchte er berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit es in A, in B bzw. in C hergestellt wurde.
Kannst du ihm dabei helfen ?

3. Eine Fabrik produziert mit zwei Maschinen die gleichen Autoersatzteile.
Mit der ersten Maschine werden 60% der Produktion gefertigt und mit der zweiten Maschine die restlichen 40%.
Die Ausschussquote bei Maschine I beträgt 3%, bei Maschine II 5%.

Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein produziertes Ersatzteil defekt ist.

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben zu Kapitel 3.1

4. Zwei Freunde verabreden sich zur Entenjagd. Einer der beiden ist ein guter Schütze und hat eine Trefferquote von 70%. Der andere ist im Schießen ungeübter und hat nur eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40%. Dafür besitzt er allerdings eine doppelläufige Flinte, das heißt, bei jeder auffliegenden Ente gibt der zweite Schütze zwei Schüsse ab, während der erste Schütze nur einen Schuss abgibt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine auffliegende Ente getroffen ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Ente von dem besseren der beiden Schützen getroffen ?

5. Hans zieht aus einer Urne mit 5 roten, 3 grünen und 2 blauen Kugeln ohne zurücklegen drei Kugeln.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er dabei nur Kugeln mit der gleichen Farbe ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hans bei seinem 3. Zug eine blaue Kugel aus der Urne holt ?

6. Eine Firma produziert Kleinteile. Der Anteil der defekten Teile beläuft sich auf 3%. Alle hergestellten Kleinteile durchlaufen am Ende der Produktion eine Kontrolle. Dabei gelingt es 80% der defekten Teile auszusortieren. Leider wurden fälschlicherweise auch 10% der guten Kleinteile ausgesondert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein produziertes Stück aussortiert wird ? Zeichne ein Baumdiagramm !

7. Die Geschäftsleitung der Firma aus Aufgabe 6 möchte die Kontrolle verbessern. Deshalb durchlaufen die nicht aussortierten Teile die Kontrolle von nun an ein zweites Mal. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein defektes Teil nicht aussortiert wird ?

b) ein defektes Teil aussortiert wird ?

c) ein gutes, fehlerfreies Teil aussortiert wird ?

8. 92% der in einem Werk gefertigten Elektrogeräte sind fehlerfrei. In einer der Produktion folgenden Endkontrolle werden 5% der eigetnlich einwandfreien und 98% der fehlerhaften Geräte als defekt aussortiert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein aussortiertes Gerät tatsächlich fehlerhaft ist ?

b) ein nicht aussortiertes Gerät fehlerfrei ist ?

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben zu Kapitel 3.1

9. In einer Fabrik werden mit drei Maschinen Glühbirnen hergestellt. Die Maschinen haben die Ausschußquoten q_1, q_2, q_3. Ihre Anteile an der Gesamtproduktion seien p_1, p_2, p_3.

a) Berechne die Ausschussquote der gesamten Produktion !

b) Der Qualitätsprüfer entnimmt der Gesamtproduktion zufällig eine Glühbirne. Er testet sie und stellt fest, dass sie fehlerfrei ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde diese Glühbirne von der 1. Maschine produziert ?

10. An einer Losbude kann man 3 Sorten Lose kaufen. Die Lose sind jeweils in gleichen Mengen abgepackt. Die erste Sorte beinhaltet 30% Gewinne, die zweite Sorte 20% und die dritte Sorte 10%.
Der Losverkäufer mischt nun die Lose in einem Eimer und zwar folgendermaßen:
Eine Packung der ersten Sorte, zwei Packungen der zweiten Sorte und drei Packungen der dritten Sorte.
Der kleine Klaus kauft nun ein Los und greift in diesen Eimer.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Klaus ein Gewinnlos ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Los, falls es gewinnt von der erste, der zweiten bzw. der dritten Sorte ? (k = 1,2,3)

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben zu Kapitel 3.2 + 3.3

1. In einer Urne sind zwei grüne und zwei blaue Kugeln.
Toni zieht nacheinander zwei Kugeln

a) mit Zurücklegen.

b) ohne Zurücklegen.

Sind die beiden Ereignisse

A: „Grün wird im 1. Zug gezogen“ und
B: „Grün wird im 2. Zug gezogen“ voneinander stochastisch unabhängig ?

Zeichne zur Verdeutlichung jeweils ein Baumdiagramm!

2. Welche Werte / Wahrscheinlichkeiten müssen x und y in der folgenden Vierfeldertafel annehmen, damit man sagen kann, dass die Ereignisse A und B voneinander stochastisch unabhängig sind ?

	B	$\overline{B}$
A	0,2	0,3
$\overline{A}$	x	y

3. Zwei Volleyballteams spielen gegeneinander auf zwei Siegsätze.
Beim ersten Satz sei die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für beide Mannschaften gleich 1 : 2. Bei dem Team, dass einen Satz gewinnt, erhöht sich die Gewinnwahrscheinlichkeit für den nachfolgenden Satz um 0,1.

a) Berechne die Siegwahrscheinlichkeit für beide Mannschaften.

b) Nimm an, dass Team 1 den ersten Satz verloren hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es trotzdem noch Gesamtsieger ?
Zeichne ein Baumdiagramm !

4. Ein Würfel wird zehnmal hintereinander geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Sechser fallen.

5. In der TV-Show „Es gibt nur einen Sieger“ sind zwei Kandidaten in der Endrunde. Beide haben bei vorangehenden Spielen die gleiche Punktezahl erkämpft und müssen deshalb nun um den Sieg würfeln. Wer zuerst die höhere Augenzahl wirft, ist der Gewinner.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bis zur Entscheidung
1. genau n
2. mindestens n
3. höchstens n
Würfe notwendig sind ($n \in \mathbb{N}$).

b) Die Augenzahl i erscheint beim ersten Wurf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt dieser Kandidat für i = 1,2,3…6 ?

Stochastik - Kapitel 3

Aufgaben zu Kapitel 3.2 + 3.3

6. Robert möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,99 den Eintritt des Ereignisses A: „beim Würfeln erscheint mindestens eine Sechs“ erreichen.
Mit wie vielen Laplace-Würfeln muß er deshalb mindestens werfen ?

7. Die Wahrscheinlichkeit bei einer Lotterie zu gewinnen beträgt 0,12.
Wie viele Lose muss Susi mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einmal zu gewinnen ?

8. Vier Laplace-Münzen stehen zur Auswahl. Eine trägt auf beiden Seiten ein Wappen, die anderen drei tragen auf einer Seite ein Wappen und auf der anderen Seite eine Zahl. Eine dieser vier Münzen wird nun mit verbundenen Augen ausgewählt und dann dreimal hintereinander geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Wappen fällt ?

b) Wenn tatsächlich dreimal Wappen erschienen ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze mit den zwei Wappen ausgewählt wurde ?
Zeichne ein Baumdiagramm !

9. Ein Brennofen fällt pro Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 aus. Er wird darum einmal am Tag kontrolliert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Ofen

a) frühestens am 5. Tag

b) erstmals am 4. Tag

c) am 3. Tag zum ersten Mal und am 8. Tag zum dritten Mal aus?

10. Der Tankstellenbesitzer T weiß, dass 30% seiner Kundschaft „Super“ tankt.
40% dieser Leute fahren dabei die Automarke M.
T weiß außerdem, dass 42% seiner gesamten Kunden weder „Super“ tanken, noch das Auto der Marke M fahren.
Leg eine Vierfeldertafel an und überprüfe die folgenden Ereignisse S und M auf Unabhängigkeit !

S: „Der Kunde tankt Superbenzin.“

M: „Der Kunde fährt ein Auto der Marke M.“

Stochastik - Kapitel 3

Gemischte Aufgaben zu Kapitel 3

1. In der 12. Jahrgangsstufe befinden sich ein Drittel Jungen. 60% aller Jungen besuchen den Leistungskurs Physik. 75% der Mädchen besuchen den Grundkurs Physik.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besucht ein beliebiger Schüler dieser 12. Jahrgangsstufe den Leistungskurs Physik ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler des Leistungskurses Physik weiblich und ein Schüler der Grundkurses Physik männlich ist ?
Zeichne sowohl zu a) als auch b) ein Baumdiagramm !

2. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 8,8% ist ein Elektrogerät unbrauchbar. Bei einer Kontrolle wird versehentlich ein brauchbares Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ausgesondert. Insgesamt sondert der Qualitätskontrolleur 10% aller Geräte aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein unbrauchbares Gerät ausgesondert wird ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgesondertes Gerät unbrauchbar ?

3. Eine Maschine stellt 30% defekte Bauteile her. Davon bleiben in der Endkontrolle 10% unentdeckt, und 40% der defekten und der guten Bauteile werden gar nicht ausgeliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) kommt ein beliebiger Artikel in den Handel ?

b) kommt ein defekter Artikel in den Handel ?

c) wird ein Artikel nicht ausgeliefert, obwohl er funktionsfähig ist ?

d) ist ein in den Handel kommender Artikel defekt ?

4. Ein Bus verkehrt zwischen den beiden Orten X und Y. Täglich sind viele Schwarzfahrer unterwegs, die durch Kontrolleure entlarvt werden sollen. Kontrolleur 1 (K1) und Kontrolleur 2 (K2) überprüfen die Passagiere deshalb stichprobenartig, K1 immer vor K2. Aus Erfahrung weiß man bereits, dass unter den Schwarzfahrern 60% Jugendliche sind. K1 entdeckt 60% der erwachsenen Schwarzfahrer und 40% der jugendlichen Schwarzfahrer. K2 entlarvt jeweils die Hälfte der erwachsenen und die Hälfte der jugendlichen Betrüger.

a) Zeichne ein 3-stufiges Baumdiagramm! Verwende dazu folgende Ereignisse:
J: Der Schwarzfahrer ist ein Jugendlicher.
E: Der Schwarzfahrer ist erwachsen.
S: Der Schwarzfahrer wird vom Kontrolleur entdeckt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Schwarzfahrer entdeckt ?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein entdeckter Schwarzfahrer ein Jugendlicher ist ?

Stochastik - Kapitel 3

Gemischte Aufgaben zu Kapitel 3

5. 70% der Mitglieder einer bekannten Krankenkasse wohnen auf dem Land. Im Jahr 2006 nahmen insgesamt 46% die Leistungen der Kasse in Anspruch, darunter waren 28% Landbewohner.

a) Was wäre für die Kasse günstiger: Mehr Landbewohner oder mehr Stadtbewohner zu versichern ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Krankenkassenmitglied, das Leistungen in Anspruch nimmt, Landbewohner ist ?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt ein Mitglied, dass die Kasse nicht in Anspruch nimmt, auf dem Land ?

6. Der berühmte Basketballspieler Miller wird von seinem Gegner gefoult und erhält einen Doppelfreiwurf. Auf Grund langjähriger Spielerfahrung weiß er, dass er mit 60% Wahrscheinlichkeit den ersten Ball in den Korb trifft. Dies gilt ebenso für den zweiten Wurf. Die Wahrscheinlichkeit, dass Miller beide Freiwürfe hintereinander verwandelt liegt bei 48%.
Zeichne ein Baumdiagramm und ermittle mit seiner Hilfe

a) die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Wurf sitzt, wenn Miller den ersten Freiwurf nicht verwandeln konnte.

b) die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Wurf daneben geht, nachdem auch der erste Wurf bereits ein Fehlversuch war.

7. Nach der Weihnachtsfeier seiner Firma kommt Fred etwas angesäuselt nach Hause.
Vor der Haustüre kramt er nach seinen Schlüsseln, um die Haustüre aufzusperren. Er hat fünf gleichartige Schlüssel, von denen nur einer in das Haustürschloss passt, lose in seiner linken Hosentasche.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schlüssel genau beim dritten Versuch passt, wenn Fred

a) einen der Schlüssel ausprobiert und ihn dann zurück in die linke Hosentasche steckt, wenn er nicht ins Schlüsselloch passt ?

b) einen der Schlüssel ausprobiert und diesen anschließend in die rechte Hosentasche steckt, wenn er nicht passt ?

8. Beim Spielen des Spiels „Mensch ärgere Dich nicht“ benötigt man eine Sechs um anfangen zu dürfen. Vorausgesetzt wird, dass jeder Spieler in jeder Runde nur einmal würfeln darf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man als Spieler
(1) in der 4. Runde die erste Sechs wirft ?
(2) in den ersten acht Runden genau eine Sechs würfelt ?

b) Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit erst beim k-ten Wurf beginnen zu dürfen genau 0,00522 beträgt. Wie groß ist dann k ?

Stochastik - Kapitel 3

Gemischte Aufgaben zu Kapitel 3

9. Beim Schulreifetest wird mit den Kindern unter anderem auch ein Farbtest durchgeführt. Dabei haben die Kinder fünf verschiedenfarbige, aber ansonsten vollkommen gleichartige Gegenstände zur Auswahl. Sie dürfen sich den „schönsten“ Gegenstand auswählen. Einer der Gegenstände hat die Farbe rot.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind
(1) einen roten Gegenstand auswählt ?
(2) bei dreimaliger Auswahl (mit Zurücklegen) nur den roten Gegenstand bzw. jeweils einen Gegenstand mit gleicher Farbe wählt ?

b) Wie häufig muß man den Farbtest mindestens durchführen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass nur jeweils der gleichfarbige Gegenstand ausgewählt wird, kleiner ist als 0,001 ?

10. Eine Laplace-Münze wird geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt sie frühestens beim achten Wurf das zweite Mal Wappen ?

11. Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ muß man eine Sechs würfeln um beginnen zu dürfen. Man darf jeweils eine Serie aus drei Würfen ausführen (d.h. man darf dreimal würfeln und versuchen eine Sechs zu werfen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man in der 4. Serie (, d.h. also, dass man beim vierten Versuch eine Sechs würfelt) das Spiel beginnen darf ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man in den ersten vier Runden anfangen darf zu spielen ?

c) Wie viele Serien muß ein Spieler mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Serie mit einer Sechs zu erhalten ?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit darf ein Spieler nach vier Serien noch nicht anfangen ?

12. Ein neu entwickeltes chemisches Verfahren wird untersucht. Man findet heraus, dass das Verfahren mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% gelingt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Verfahren bei zehnmaliger unabhängiger Hintereinanderausführung genau siebenmal gelingt ?

b) Wie häufig muss der Laborant das Verfahren mindestens unabhängig hintereinander ausführen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit >99% wenigstens einen misslungenen Versuch beobachten kann ?

c) Wie groß müsste die Wahrscheinlichkeit für das Gelingen des Verfahrens sein, wenn (nach Aufgabe b)) erst bei 100 Versuchen die Wahrscheinlichkeit von 99% erreicht werden soll ?

Stochastik - Kapitel 3

Gemischte Aufgaben zu Kapitel 3

13. In einer Urne befinden sich insgesamt 10 Kugeln. Sie lassen sich nur anhand ihrer Farbe voneinander unterscheiden. Es gibt 2 weiße, 3 rosafarbene und 5 braune Kugeln.

a) Im ersten Spiel zieht Peter 3 Kugeln mit einem Griff.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a1) 2 weiße Kugeln zieht ?

a2) 2 rosafarbene und 1 braune Kugel zieht ?

a3) genau 2 braune Kugeln zieht ?

b) Im zweiten Spiel zieht Peter nur eine Kugel, dann notiert er sich die Farbe und legt sie anschließend wieder in die Urne zurück. Insgesamt zieht er zweimal hintereinander.

b1) Zeichne ein Baumdiagramm.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

b2) beide Farben gleich sind,

b3) genau einmal die Farbe rosa auftritt.

c) Wenn zweimal dieselbe Farbe aus der Urne gezogen werden soll, wird zusätzlich zum Einsatz, der 1 Euro betragen soll, ein Gewinn von 3 Euro ausbezahlt.
Ist das Spiel für Peter günstig ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben ab Seite 25

4. Zufallsgrößen / Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

4.1 Zufallsgröße / Zufallsvariable

Definition:
Eine Zufallsgröße (Zufallsvariable) X ordnet jedem Versuchsergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zu. Das heißt, die Zufallsgröße X nimmt bei jedem Ergebnis einen Zahlenwert x_i an.

1. $X = x_i$ beschreibt dabei das Ereignis, das aus allen Ergebnissen besteht, bei denen X die Zahl x_i annimmt.

2. Die Zufallsgröße X nennt man **diskret**, wenn sie nur abzählbar viele Werte annehmen kann.

3. $P(X = x_i)$ ist die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses $X = x_i$.

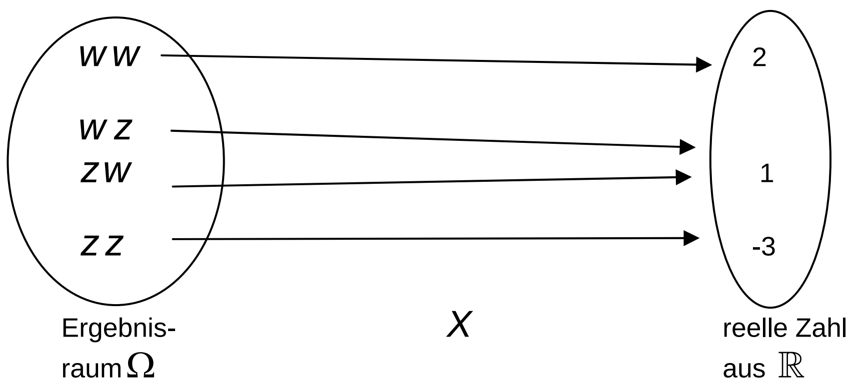
Beispiel:
Zwei Spieler haben eine Münze. Sie werfen sie zweimal und schließen eine Wette ab.
Spieler A bekommt von Spieler B 2.- € wenn zweimal Wappen und
1.- € wenn einmal Wappen erscheint.
Spieler A muss an Spieler B 3.- € bezahlen, wenn keinmal Wappen erscheint.

Lösung:
Zunächst ist es notwendig für den **Gewinn** des Spielers A eine Variable einzuführen.
Diese Variable muss zufällig die Werte 2, 1 und - 3 annehmen können (den Verlust von 3.- € behandeln wir wie einen Gewinn von - 3.- €) und man nennt sie **Zufallsvariable X** oder **Zufallsgröße X**.

Für das Ereignis $\{w\,w\}$ (= es fällt zweimal Wappen) schreiben wir dann $X = 2$.

Für das Ereignis $\{w\,z,\ z\,w\}$ (= es erscheint einmal Wappen) schreiben wir $X = 1$.

Für das Ereignis $\{z\,z\}$ (= Wappen erscheint keinmal) schreiben wir $X = -3$.



Stochastik - Kapitel 4

Als Wahrscheinlichkeiten für die **Zufallsvariablen** X erhalten wir:

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\qquad P(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};\qquad P(X=-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

4.2 Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße / Zufallsvariable

Beispiel:
Hans spielt zum ersten Mal Roulette. Er setzt eine Einheit auf das erste Dutzend (= die Zahlen von 1 bis 12). Sollte er gewinnen, erhält er den dreifachen Einsatz ausbezahlt, andernfalls ist sein Einsatz verloren.
Die Zufallsgröße X beschreibe den Reingewinn pro Spiel (der Reingewinn entspricht der Auszahlungssumme abzüglich des Einsatzes). Sollte das Dutzend

$D=\{1,2,3,\ldots,12\}$ eintreten, nimmt X den Wert 3 - 1 = 2 an, andernfalls den Wert -1.

Man kann also sagen, dass die Zufallsgröße X jedem Element aus D den Wert 2 und allen übrigen Elementen den Wert -1 zuordnet. Man schreibt:

$D \xrightarrow{X} 2 \qquad \overline{D} \xrightarrow{X} -1$

Im Roulette gibt es 37 mögliche Zahlen; die 1 bis 36 und die 0.

Somit gilt:

$$P(X=2)=P\left(\{\omega \mid X(\omega)=2\}\right)=P(D)=\frac{12}{37}$$

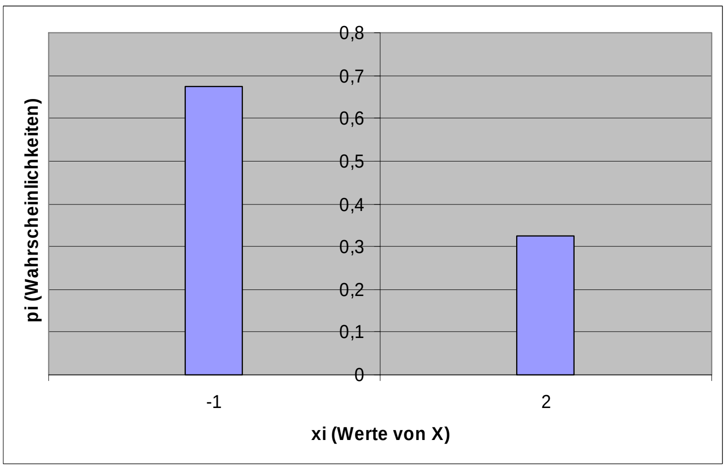
und

$$P(X=-1)=P(\overline{D})=\frac{25}{37}$$

Die Zufallsvariable besitzt deshalb die folgende **Verteilung**:

x_i (Werte von X)	-1	2
p_i (Wahrscheinlichkeiten)	$\frac{25}{37}\approx 0{,}676$	$\frac{12}{37}\approx 0{,}324$

Eine solche Verteilung kann man mit Hilfe eines Stabdiagrammes oder Säulendiagrammes am deutlichsten darstellen:



Stochastik - Kapitel 4

Merke:
Die Gesamtheit aller Paare (x_i, p_i) mit $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, ...$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Wahrscheinlichkeitsfunktion** der diskreten Zufallsgröße X.
Man schreibt auch $W : x \mapsto P(X = x_i)$.

Die Summe der Funktionswerte von W ist 1: $\sum_{x_i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$ (das bedeutet, dass die Summe aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten immer 1 ergibt)

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** W lässt sich graphisch mit Hilfe einer Wertetabelle (siehe Beispiel oben) oder im Koordinatensystem durch einen Graph (lauter isolierte Punkte), ein Stabdiagramm (siehe Beispiel oben) oder ein Histogramm (dazu später mehr) darstellen.

Anmerkungen:

■ Die Funktion $F : x \mapsto P(X \leq x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **kumulative Verteilungsfunktion (Summenfunktion)** der Zufallsvariablen X.
$F(X) = P(X \leq x)$ ist immer die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, der kleiner oder auch gleich x ist.

■ Die Zufallsvariable X nennt man **stetig**, wenn für ihre Verteilungsfunktion $F : x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$ folgendes gilt:

$F(x)$ ist stetig und $F(x)$ ist (bis auf einige Punkte auf der x-Achse) differenzierbar und $F'(x) = f(x)$ muß stetig sein.
$\Rightarrow$ Diese Funktion heißt dann **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

$\Rightarrow$ F kann also folgendermaßen dargestellt werden: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)$

■ In der graphischen Darstellung ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion, die an den Stellen $x = x_i$ Sprünge der Höhe $h_i = P(X = x_i)$ macht.
(wie eine solche Treppenfunktion genau aussieht werden wir später noch sehen)

Rechenregeln mit Hilfe der Verteilungsfunktion:

1. $P(X \leq a) = F(a)$
2. $P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - F(b)$
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

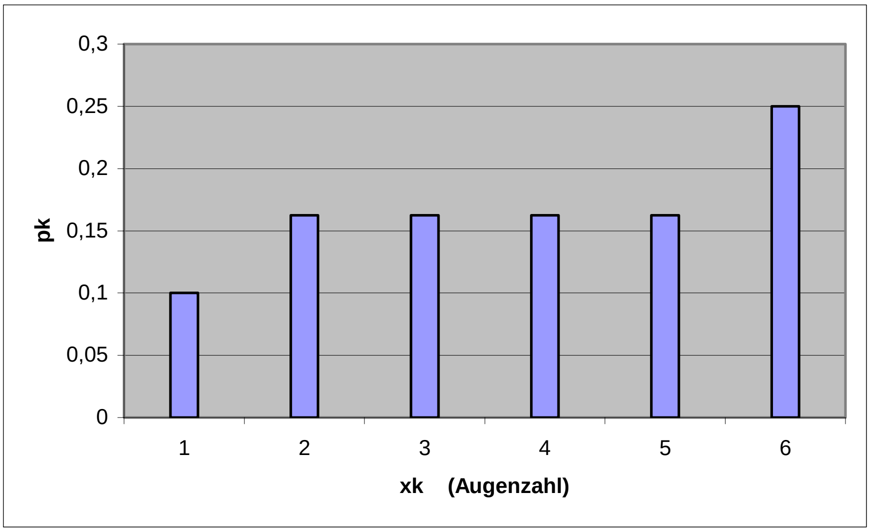
Stochastik - Kapitel 4

1. Übungs-Beispiel:

Bei einem Spiel wird ein verfälschter Würfel verwendet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlen ist allerdings bekannt:

x_k	1	2	3	4	5	6
p_k	0,1	0,1625	0,1625	0,1625	0,1625	0,25

Diese Wahrscheinlichkeiten stellt man in einem Stabdiagramm oder Säulendiagramm dar:



Zunächst bestimmen wir die Verteilungsfunktion $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$.

Dazu ist es notwendig die Summenwahrscheinlichkeiten $F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{x_i \leq x_k} p_i$

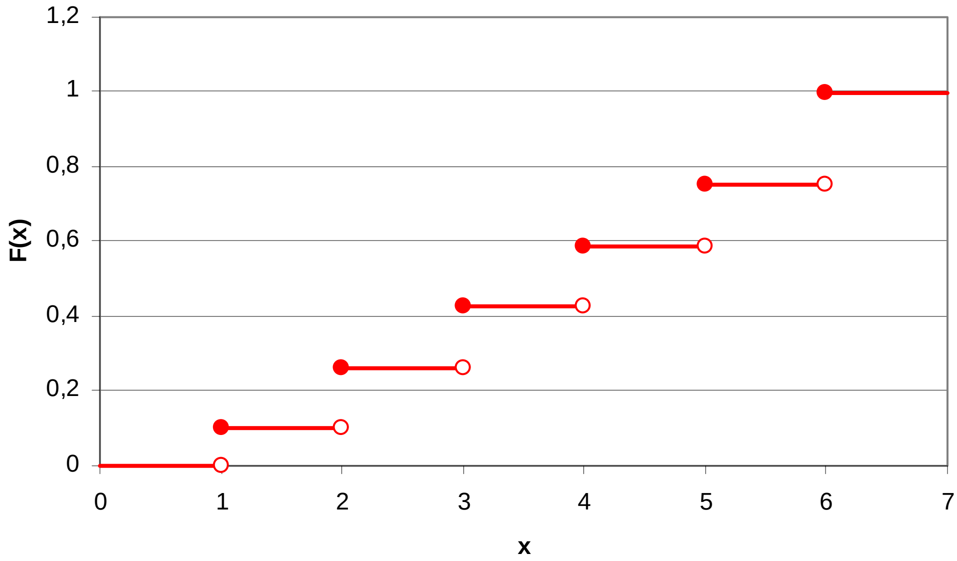
zu berechnen:

x_k	p_k	$F(x_k) = \sum_{x_i \leq x_k} p_i$
1	0,1	0,1
2	0,1625	0,2625
3	0,1625	0,425
4	0,1625	0,5875
5	0,1625	0,75
6	0,25	1

Stochastik - Kapitel 4

Jetzt können wir die Verteilungsfunktion zeichnen.

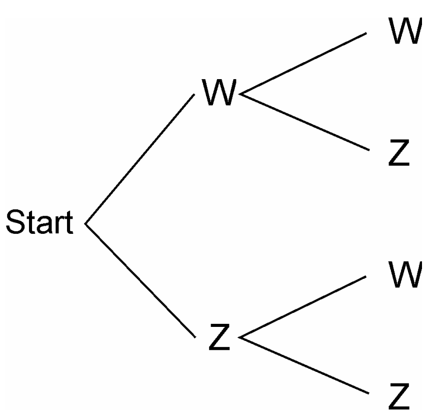
Merke:
Die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable ist eine **Treppenfunktion**. Die Sprungstellen sind immer die Werte x_i der Zufallsgrößen und die Sprunghöhen die entsprechenden berechneten Wahrscheinlichkeiten p_i.



2. Übungs-Beispiel:

Hans wirft zweimal eine Laplace-Münze.

a) Gib den Ergebnisraum Ω an und zeichne ein Baumdiagramm.



$$\Omega = \{WW, WZ, ZW, ZZ\}$$

Stochastik - Kapitel 4

b) Hans spielt mit seinem Freund Michael ein Glücksspiel nach folgenden Regeln:
- man erhält 2 Euro wenn zweimal Wappen fällt
- man erhält 1 Euro wenn nur einmal Wappen fällt
- man muss 2 Euro bezahlen, wenn keinmal Wappen, sondern zweimal Zahl fällt.

Die Zufallsvariable X sei der Gewinn in Euro.
Gib mit Hilfe all dieser Daten nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Ergebnis ω	WW	WZ	ZW	ZZ
Gewinn x_i in €	2	1	1	- 2

$W : x_i \mapsto P(X = x_i)$

Gewinn x_i in €	2	1	- 2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(In dieser Tabelle wird die Wahrscheinlichkeit für WZ bzw. ZW nur einmal berechnet. In welcher Reihenfolge Zahl und Wappen fallen spielt nämlich keine Rolle)

c) Bestimme nun die Verteilungsfunktion F. Berechne anschließend, mit welcher Wahrscheinlichkeit man höchstens 1 Euro gewinnt.

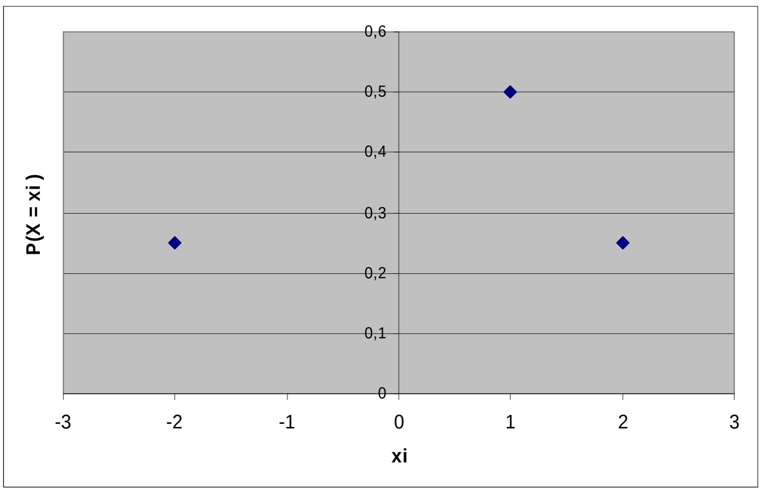
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0{,}25 & \text{für } -2 \le x < 1 \\ 0{,}75 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{P(X \le 1) = F(1) = 0{,}75}}$$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens 1 € (oder weniger) zu gewinnen liegt bei 75%.

d) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsfunktion (3 verschiedene Darstellungsmöglichkeiten: Funktionsgraph, Stabdiagramm, Histogramm) und anschließend die Verteilungsfunktion.

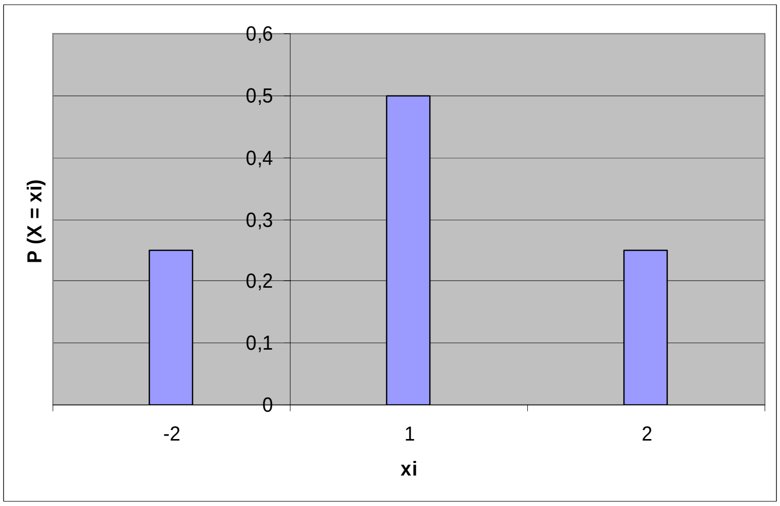
Funktionsgraph:



Stochastik - Kapitel 4

Stabdiagramm bzw. Säulendiagramm:

Die Stäbe bzw. Säulen haben folgende Länge $\Rightarrow W(x_i) = P(X = x_i)$

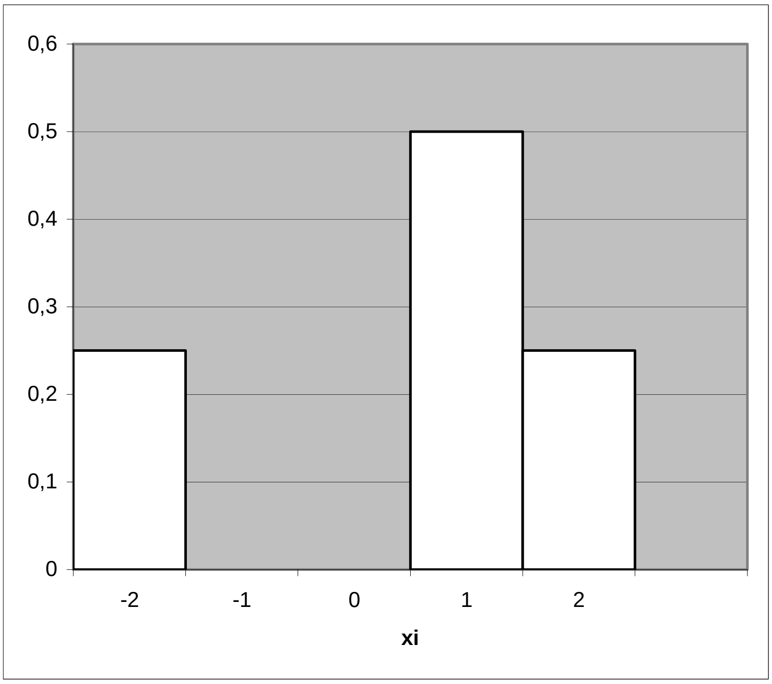


Histogramm:

Die Flächeninhalte der Rechtecke haben jeweils den Wert $W(x_i) = P(X = x_i)$.

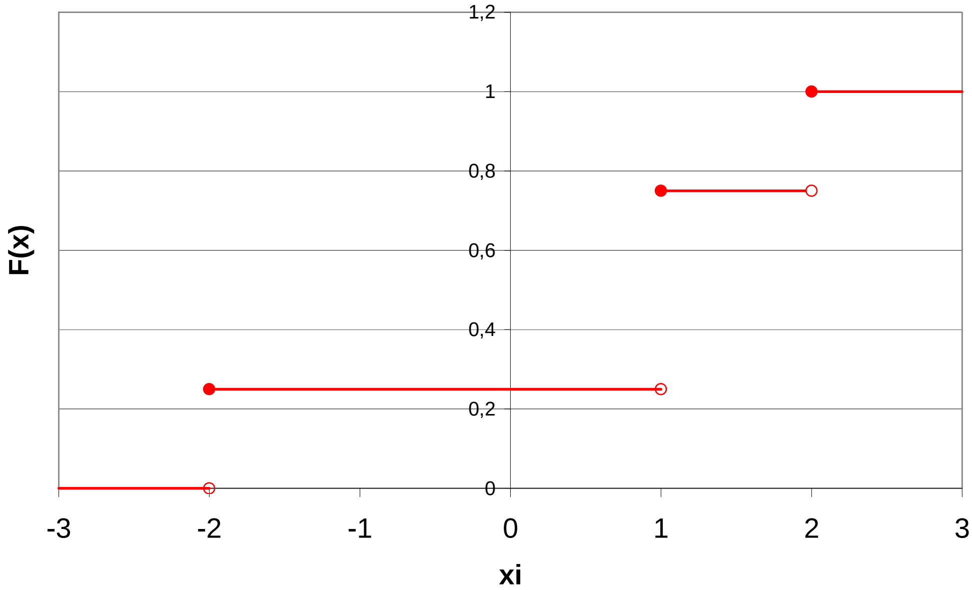
Die Flächensumme aller dieser Rechtecke ergibt 1

(Da insgesamt immer die Wahrscheinlichkeit von 100% erreicht wird) !



Stochastik - Kapitel 4

Verteilungsfunktion F:



■ Wir haben bereits gelernt, dass die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable X eine Treppenfunktion ist. An den Stellen $x = x_i$ macht sie Sprünge der Höhe $h_i = P(X = x_i)$.

■ Die Verteilungsfunktion F nimmt monoton zu und ist rechtsseitig stetig.
Darum gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
das heißt also, dass F wegen $0 \leq F(x) \leq 1$ beschränkt ist.

Stochastik - Kapitel 4

4.3 Maßzahlen einer diskreten Zufallsvariablen

4.3.1 Der Erwartungswert

■ Zufallsvariablen sind dann eindeutig bestimmt, wenn man ihre Wahrscheinlichkeits-verteilung kennt.

■ Einfach ist es allerdings, wenn man Informationen, die in der Verteilung einer Zufallsvariablen stecken durch Zahlenwerte verdeutlichen kann.

■ Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen ist durch eine Gesamtheit von Beobachtungen gegeben. Darum wird man versuchen, charakteristische Zahlenwerte so anzugeben, dass sie alle Beobachtungen repräsentieren.

■ Diese Zahlenwerte kann man in 2 Gruppen einteilen:
⇒ Mittelwerte: sie informieren über die Lage der Verteilung
⇒ Streuungswerte: sie informieren über die Breite der Verteilung

Definition „Erwartungswert":

X sei eine diskrete Zufallsvariable und nehme die Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (wobei $i = 1, 2, 3 \ldots, n$) an.

Man bezeichnet die Zahl $\mu = E(X)$ dann als **Erwartungswert der diskreten Zufallsvariablen X.**

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

oder

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i), \; i = 1, 2, \ldots$$

Anmerkung:
■ Der Erwartungswert drückt das aus, was man auf lange Sicht gesehen erwarten kann.
Ist X beispielsweise der Gewinn bei einem Glücksspiel, dann gibt μ den **durchschnittlichen Gewinn** bei n Spielen an.

Stochastik - Kapitel 4

1. Übungs-Beispiel:

Evi wirft eine Laplace-Münze solange, bis Wappen erscheint. Höchstens wirft sie die Münze allerdings viermal.
Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an.
Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne den Erwartungswert $E(X)$.

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X=4)=1-\sum_{i=1}^{3}P(X=i)$$

$$\mu=E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=\underline{\underline{1,875}}$$

2. Übungs-Beispiel:

Ein Schreiner notiert sich seine täglichen Arbeitszeiten ganz genau.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der vollen Stunden, die der Schreiner täglich benötigt um Aufträge und Arbeiten zu erledigen.
Es gilt für die Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsvariablen X folgendes:

x	1	2	3	4	5	6	sonst
$W(x)$	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0

Berechne nun die durchschnittliche tägliche Arbeitszeit des Schreiners.

⇒ Die Aufgabenstellung „durchschnittliche tägliche Arbeitszeit“ gibt einen Hinweis darauf, dass man hier den Erwartungswert μ berechnen soll.

$$\mu=1\cdot 0,05+2\cdot 0,1+3\cdot 0,25+4\cdot 0,3+5\cdot 0,2+6\cdot 0,1=\underline{\underline{3,8}}$$

⇒ Die durchschnittliche tägliche Arbeitszeit des Schreiners beträgt somit 3,8 Stunden.

Anmerkung:

■ Der Erwartungswert muss nicht unbedingt einer der Werte sein, die die Zufallsvariable annehmen kann.

Rechenregeln für den Erwartungswert:

■ Es gilt **immer**: (auch bei stochastischer Abhängigkeit von X und Y).
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ „Additivität des Erwartungswertes“

■ Es gilt bei stochastischer Unabhängigkeit von X und Y:
$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ „Produktdarstellung“

Stochastik - Kapitel 4

4.3.2 Die Varianz und die Standardabweichung

■ Durch eine weitere Maßzahl wird die mittlere Abweichung der Funktionswerte vom Erwartungswert charakterisiert.

■ Das dazu gebräuchlichste Maß ist die mittlere quadratische Abweichung, auch **Varianz** genannt.

■ Anders gesagt beschreibt die Varianz also die Streuung der Funktionswerte einer Zufallsvariablen X um ihren Erwartungswert $E(X)$.

Definition „Varianz“:

Eine diskrete Zufallsvariable X nimmt mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (wobei $i = 1,2,...,n$) die Werte $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ an. Sie besitzt außerdem den Erwartungswert μ.

Die reelle Zahl $V(X) = \sigma^2$ heißt Varianz der diskreten Zufallsvariablen X.

$$V(X) = \left(x_1 - \mu\right)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$$

oder

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = \sum_i \left(x_i - \mu\right)^2 \cdot P(X = x_i).$$

Rechenregel für die Varianz:

Sind X und Y stochastisch unabhängig, gilt:

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ „Additivität der Varianz“

Anmerkung:

■ Die Varianz hat als Streuungsmaß zwei Nachteile:

⇒ Abweichungen vom Erwartungswert, die größer sind als 1 (sogenannte „Ausreisser“) sind auf Grund der Quadratur gewichtiger als Abweichungen die keiner sind als 1.

⇒ Die Benennung der Varianz stimmt nicht mit der Benennung der Zufallsvariablen überein (z.B. Einheit der Varianz ist quadriert, die der Zufallsvariablen nicht).
Deshalb führte man noch die folgende Maßzahl ein.

Definition „Standardabweichung“:

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt Standardabweichung der diskreten Zufallsvariablen X.

Stochastik - Kapitel 4

Übungs-Beispiel:

Hans ist 30 Jahre alt und schließt eine Risikolebensversicherung über 20.000 Euro ab.
Der jährliche Beitrag sei 100 Euro.
Die Sterbewahrscheinlichkeit während eines Jahres betrage 0,0029.

Die Zufallsvariable X beschreibe den Reingewinn der Versicherungsgesellschaft aus diesem Risikoleben-Vertrag während des ersten Jahres.

Für X gilt: $\Rightarrow$ im Todesfall: $X = -20000 + 100 = -19900$
(d.h., die Versicherung müsste 20000 Euro auszahlen und hat dabei erst einen Jahresbeitrag von 100 Euro von Hans erhalten)

$\Rightarrow$ im Überlebensfall: $X = 100$
(d.h. die Versicherung muss keine Todesfallleistung ausbezahlen und hat dabei den ersten Jahresbeitrag von 100 Euro erhalten)

X besitzt somit folgende Verteilung:

Werte von X	-19 900	100
Wahrscheinlichkeiten	0,0029	0,9971

Daraus folgt:
Erwartungswert: $E(X) = -19900 \cdot 0{,}0029 + 100 \cdot 0{,}9971 = \underline{\underline{42{,}00\ €}}$

Varianz: $V(X) = (-19900 - 42)^2 \cdot 0{,}0029 + (100 - 42)^2 \cdot 0{,}9971 = \underline{\underline{1156636\ €^2}}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \underline{\underline{1075{,}47\ €}}$

4.3.3 Wichtige Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

1.

Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:
$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Sonderfälle: $E(b) = b$; $E(aX) = a \cdot E(X)$

2.

Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:
$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$
$$\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

Sonderfälle:
$V(b) = 0$; $V(aX) = a^2 \cdot V(X)$
$\sigma(b) = 0$; $\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$

3.

Verschiebungssatz:
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Stochastik - Kapitel 4

4.3.4 Die Standardisierung

Definition:

Eine Zufallsvariable Z mit dem Erwartungswert $E(Z)=0$ und der Standardabweichung $\sigma(Z)=1$ heißt **standardisiert**.

Das bedeutet, dass zu jeder Zufallsvariablen X eine standardisierte Zufallsvariable $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ existiert.

Anmerkung:

■ Es ist wichtig die Zufallsvariablen $Y=X+X$ und $Z=2\cdot X$ zu unterscheiden.

■ Für $Y=X+X$ gilt:
$$E(Y)=E(X+X)=E(X)+E(X)=2\cdot E(X)$$
$$V(Y)=V(X+X)=V(X)+V(X)=2\cdot V(X)$$

■ Für $Z=2\cdot X$ gilt:
$$E(Z)=E(2\cdot X)=2\cdot E(X)$$
$$V(Z)=V(2\cdot X)=4\cdot V(X)$$

Übungs-Beispiel:

Die Zufallsvariable X hat folgende Verteilung:

x_i	2	3
$P(X=x_i)$	0,4	0,6

$E(X)=2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}6=2{,}6$

$V(X)=4\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}6-2{,}6^2=0{,}24$

$Y=X+X$: Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 4, 5, 6 an.
Somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung folgendes:

Y	4	5	6
$P(Y=y)$	0,16	0,48	0,36

$E(Y)=2\cdot E(X)=5{,}2$

$V(Y)=2\cdot V(X)=0{,}48$

(auch beim direkten Berechnen kommt man auf diese beiden Werte)

$Z=2\cdot X$: Die Zufallsvariable Z nimmt die Werte 4 und 6 an.
Somit gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung folgendes:

Z	4	6
$P(Z=z)$	0,4	0,6

$E(Z) = E(2 \cdot X) = 2 \cdot E(X) = 5{,}2$
$V(Z) = V(2 \cdot X) = 4 \cdot V(X) = 0{,}96$
(diese Werte erhält man bei direkter Berechnung ebenso)

4.4 Die Binomialverteilung

Definition: Die Binomialverteilung beschreibt das „Ziehen mit Zurücklegen“ beziehungsweise das wiederholte Ausführen eines Zufallsexperimentes unter den jeweils gleichen Bedingungen.

■ Einfacher erklärt:

Wir betrachten ein Bernoulli-Experiment:
Es werde n-mal unabhängig hintereinander ausgeführt.
Wichtig zu beachten ist dabei jedes Mal, ob das Ereignis A eintritt oder ob das Ereignis $\overline{A}$ eintritt.
Das Ereignis A trete mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = P(A)$ ein.
Die Zufallsgröße X sei die Anzahl des Auftretens von A.

■ Eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit den beiden Parametern n und p beschreibt in einer unabhängigen Versuchsserie mit dem Umfang n die Anzahl all derjenigen Versuchen, bei denen das Ereignis A eintritt. Das ist also die **absolute Häufigkeit** von A.
Das Ereignis A besitzt dabei bei jedem Versuch immer die Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$.
Dabei ist es unwichtig, wie der vorangegangene Versuch ausgegangen ist
(Vergleiche: genauso ist es beim „Ziehen mit Zurücklegen“).

Wir folgern also:

Eine Zufallsgröße X heißt dann **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion folgendes gilt:
$P(X = k) = B_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, wobei k = 0, 1, 2, … ,n

■ Der Buchstabe B steht für Binomialverteilung. Er kann aber vernachlässigt werden.

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:
$F(x) = B_p^n(X \le x) = \sum\limits_{k \le x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, wobei k ganzzahlig ist mit $0 \le k \le n$.

Stochastik - Kapitel 4

■ Für die Maßzahlen gilt:

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

■ Für gebräuchliche p und n sind die Werte der Binomialverteilung tabelliert. Das bedeutet, dass man für sie nicht jedes Mal die Berechnung ausführen muss, sondern die Ergebniswerte einfach aus der Tabelle ablesen kann.

Übungs-Beispiel:

Der Besitzer einer Tankstelle führt eine Umfrage unter seinen Kunden durch. Dabei findet er heraus, dass allen ankommenden Autos mit einer 30%igen Wahrscheinlichkeit Diesel tanken.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 10 Autos genau fünf Diesel tanken ?

Gegeben: $n = 10$ $k = 5$ $p = 0,3$

Binomialverteilung: $P(X = k) = B_p^k(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$\Rightarrow P(X = 5) = B_{0,3}^{10}(X = 5) = 0,10292 = \underline{\underline{10,29\%}}$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tanken von den nächsten 10 Autos höchstens sechs Diesel ?

$P(X \leq 6) = B_{0,3}^{10}(X \leq 6) = 0,98941 = \underline{\underline{98,94\%}}$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nächsten 10 Fahrzeugen mindestens eines mit Diesel betankt werden muss ?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - B_{0,3}^{10}(X = 0) = 1 - 0,02825 = 0,97175 = \underline{\underline{97,18\%}}$

d) Wie viele Fahrzeuge die Diesel tanken erwartet man unter den nächsten 100 Kunden ?

$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,3 = \underline{\underline{30}}$

Stochastik - Kapitel 4

4.5 Die Hypergeometrische Verteilung

■ Hier sehen wir den umgekehrten Fall zur Binomialverteilung. Durch die hypergeometrische Verteilung wird das „Ziehen ohne Zurücklegen“ beschrieben.

■ Einfacher erklärt:
Wir stellen uns eine Menge mit insgesamt N Elementen vor.
Von diesen N Elementen besitzen K das Merkmal A.
Es werden nun zufällig n Elemente entnommen.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl aller gezogenen Elemente, die die Eigenschaft A aufweisen.

Die hypergeometrische Verteilung tritt also beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer endlichen Grundgesamtheit auf.
All diese Experimente kann man durch das uns bereits bekannte Urnenmodell ohne Zurücklegen beschreiben:
■ Eine Urne erhalte N Kugeln, von denen genau M schwarz sind. Aus der Urne werden nun zufällig n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X beschreibt dabei die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe vom Umfang n.

Es gilt für die **hypergeometrische Verteilung**:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ wobei } 0 \le k \le M \text{ und } 0 \le n-k \le N-M$$

Beachte:
Es existieren verschiedene Schreibweisen. Deshalb muss man unbedingt auf die Bezeichnung der einzelnen Elemente achten. Eine häufig vorkommende Form ist folgende:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ mit k = 0, 1, 2, … ,n.}$$

(Man sieht, dass hier die Bezeichnung M gegen K ausgetauscht wurde !)

Stochastik - Kapitel 4

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:

$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} P(X = k)$, wobei k ganzzahlig ist mit $0 \le k \le n$.

■ Für die Maßzahlen gilt:

Erwartungswert: $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$ oder anders $E(X) = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ oder $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

(man sieht, dass hier $p = \frac{M}{N}$ oder $p = \frac{K}{N}$)

Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Übungs-Beispiel:

In einer Holzkiste bewahrt ein Hobby-Schreiner 20 Werkstücke auf, von denen drei fehlerhaft sind. Es werden aus der Kiste nun zufällig fünf Stücke ausgewählt.
X sei die Anzahl der fehlerhaften Stücke in der Stichprobe.

a) Der Schreiner zieht mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei jedes Mal ein fehlerhaftes Stück zieht ?

Gegeben: $n = 5$ $\quad p = \frac{3}{20} = 0{,}15$ $\quad k = 3$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{5-3} = 0{,}0244 = \underline{\underline{2{,}44\%}}$$

b) Der Schreiner zieht danach ohne Zurücklegen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass er die drei fehlerhaften Stücke erwischt ?

Gegeben: $n = 5$ $\quad M = 3$ $\quad N = 20$ $\quad k = 3$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{17}{5-3}}{\binom{20}{5}} = 0{,}00877 = \underline{\underline{0{,}88\%}}$$

Stochastik - Kapitel 4

4.6 Die Poisson-Verteilung

Liegt uns ein großes n und ein kleines p vor, ist es sehr schwierig und langwierig, die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung zu berechnen.
Als Faustregel dafür, was man als „großes n bzw, als kleines p" bezeichnen darf, verwendet man folgende Werte: $p \leq 0{,}1$ und $n \geq 100$.

Mit $n \cdot p = \lambda$ (anstelle des λ ist manchmal auch die Bezeichnung μ zu finden) gilt nach Poisson:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ np=\lambda}} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bei der Bildung dieses Grenzwertes geht p gegen 0, wenn $n \to \infty$. Allerdings geschieht das immer so, dass $n \cdot p = \lambda$ gilt. $n \cdot p = \lambda$ ist also konstant.

Merke:

■ Eine Zufallsvariable X ist **poissonverteilt**, wenn mit einem Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

■ Für die Verteilungsfunktion F gilt:

$$F(X) = P(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

■ Für die Maßzahlen gilt:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

4.6.1 Anwendung der Poissonverteilung

Die Poisson-Verteilung lässt sich auf drei unterschiedliche Arten anwenden:

(1) Für große n und kleine p lässt sich eine Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung approximieren. Einfacher gesagt, verwendet man die Poissonverteilung quasi dazu um eine Näherung der Binomialverteilung zu erhalten.

1. Beispiel:
In Vergissmeinnicht-Blumensamen-Packungen sind jeweils 1000 Körner enthalten. Man weiß aus Erfahrung, dass 0,5 % der Körner nicht keimen und deshalb keine Vergissmeinnicht wachsen werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Packung mehr als 8 nicht keimende Samenkörner zu finden ?

Stochastik - Kapitel 4

Lösung:
Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der nicht keimenden Samen.
Es gilt folglich:

$$P(X>8)=1-P(X\le 8)=1-B_{0,005}^{1000}(X\le 8)\approx$$
$$1-\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}+\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!}+\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}\right)e^{-5}\approx$$
$$\approx 1-0{,}93191=0{,}06809\approx \underline{\underline{6{,}81\%}}$$

Es befinden sich in einer Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,81% mehr als 8 nicht keimende Samenkörner.

(2) Zur Beschreibung von Ereignissen, bei denen uns lediglich der Mittelwert μ bekannt ist.

2. Beispiel:
Ein Grenzpolizist hat genau aufgepasst und festgestellt, dass an seinem sehr ruhig gelegenem Grenzübergang durchschnittlich nur 3 Autos täglich vorbei kommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass morgen 4 Autos den Grenzübergang passieren?

Lösung:
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Autos, die pro Tag den Grenzübergang passieren.
Es gilt dann: $\mu=3;\quad k=4;$

$$P_3(X=4)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}=\frac{3^4\cdot e^{-3}}{4!}=0{,}163803\approx\underline{\underline{16{,}4\%}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass morgen vier Autos die Grenze überqueren beläuft sich auf 16,4%.

(3) Als Beschreibung oder zur Überprüfung einer empirischen Verteilung.

3. Beispiel:
In einem großen Bäckereibetrieb werden täglich 2000 Eier verarbeitet. Der Bäckereimeister hat die letzten 200 Tage genau Buch über sogenannte „Zweidottereier“ geführt. Aus seinen Aufzeichnungen ergibt sich folgende Verteilung:

Anzahl der Zweidottereier	0	1	2	3	4	5 oder mehr
Anzahl der Tage	110	65	21	3	1	0

Überprüfe nun, ob die Anzahl der Zweidottereier poissonverteilt ist.

Stochastik - Kapitel 4

Lösung:

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Zweidottereier an.

Es gilt dann: $\mu = \frac{1}{200}(0 \cdot 110 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 0{,}6.$

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeiten $P_{0,6}(X = k)$, multiplizieren diese Werte anschließend mit 200 und vergleichen unsere Ergebnisse dann mit den vom Bäckermeister beobachteten Werten.

Anzahl k der Zweidottereier	0	1	2	3	4	5 oder mehr
Anzahl der Tage	110	65	21	3	1	0
$P_{0,6}(X = k)$	0,549	0,329	0,099	0,020	0,003	0
$200 \cdot P_{0,6}(X = k)$	109,8	65,8	19,8	4	0,6	0

Wir sehen, dass die errechneten Werte (4.Zeile) mit den beobachteten Werten (2. Zeile) ziemlich gut übereinstimmen, d.h. man kann sagen, dass die Anzahl der Zweidottereier nahezu $P_{0,6}$-verteilt ist.

Stochastik - Kapitel 4

4.7 Normalverteilungen

4.7.1 Die Standard-Normalverteilung

- Von C.F. Gauß eingeführt
- Ist die zentrale Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechung
- Viele Zufallsgrößen die wir in der Praxis beobachten können, folgen dieser Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $E(X)=0$ und $Var(X)=1$ nennt man normalverteilt, wenn X

a) folgende Dichte besitzt: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

b) folgende Verteilungsfunktion besitzt: $\Phi(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-u^2}{2}}du$.

Dieses Integral können wir nicht berechnen und verwenden deshalb zur Ermittlung von Tabellenwerten (Tabellen in statistischen Formelsammlungen) sogenannte numerische Verfahren.

Für jedes $c>0$ gilt: $P(-c\le X\le c)=2\Phi(C)-1$.

Beweis: $P(-c\le X\le c)=P(X\le c)-P(X<-c)$

weil X stetig ist, gilt

$P(X<-c)=P(X\le -c)$

$$P(X\le -c)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

Allgemeine Formel der Integralrechnung:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(0)=0{,}5 \text{ (wegen Symmetrie)}$$

weil $e^{-\frac{u^2}{2}}$ gerade ist, erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{c}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(c)-\Phi(0)=\Phi(c)-0{,}5$$

Als Folge daraus:

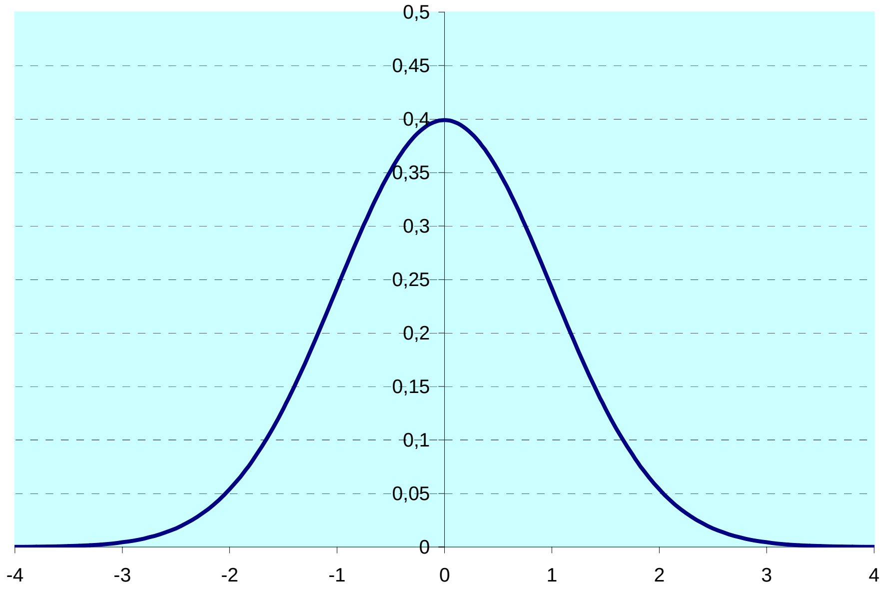
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-c}e^{-\frac{u^2}{2}}du=0{,}5-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=0{,}5-\left(\Phi(c)-\Phi(0)\right)=1-\Phi(c)=P(X<-c)$$

Endlich:

$$P(-c\le X\le c)=\Phi(c)-\left(1-\Phi(c)\right)=2\Phi(c)-1$$

Graphische Darstellung zur Verdeutlichung:

Dichtefunktion:



Erklärungs-Beispiel:

Die Grenze c können wir nun mit Hilfe einer gegebenen Wahrscheinlichkeit γ ermitteln, wobei $P(-c \le X \le c) = \gamma$

$\gamma = 2\Phi(c) - 1;\qquad \Phi(C) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Damit ist c das $\frac{1+\gamma}{2}$ - Quantil $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$, also diejenige Stelle mit $\Phi(z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Zahlenbeispiel: $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow c = 1{,}96$ (Tabellenwert)

Merke:

Die Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern μ und σ, wenn für die Dichtefunktion f Folgendes gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R},\quad \mu \in \mathbb{R},\quad \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Abgekürzt schreibt man: X ist $N(\mu;\sigma)$ - verteilt.

Stochastik - Kapitel 4

Wichtig!!!!!!

- Jede $N(\mu;\sigma)$ - verteilte Zufallsvariable X kann durch $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$

  (man spricht hier von der sog. „Standardisierung“ und verwendet anstelle des U´s auch das Zeichen Phi: „Φ“)

  auf eine $N(0;1)$ - verteilte Zufallsvariable transformiert werden.

- Auch die Verteilungsfunktion F erhält man über diese Standardisierung:
  $F(x) = P(X \le x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

- Allgemein formuliert gilt also somit:
  $P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ mit $a < b$

  $P(X = x) = 0$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$.

1. Beispiel:

Wir nehmen an, dass X die Füllmenge von Flaschen darstelle und normalverteilt sei.
Der Erwartungswert μ sei abhängig von der Einstellung der Abfüllmaschine.
Die Standardabweichung $\sigma = 3$ hingegen sei abhängig von der Einstellung für μ.
Die Flasche ist mit einem Aufkleber versehen, der einen Mindestinhalt von 980 ml angibt.

Wie groß muß μ mindestens sein, damit dieser Aufkleber auf Dauer bei mindestens

a) 95%

b) 99% der Produktionsmenge korrekte Angaben macht ?

Lösung zum 1. Beispiel:

Wir suchen das minimale μ, wobei

$\gamma = P(X \ge 980) = P\left(\frac{X-\mu}{3} \ge \frac{980-\mu}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{980-\mu}{3}\right)$ ist.

Formel:

$$\Phi(-c) + \Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-c} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = P(X \le \infty) = 1 \quad \text{für ein beliebiges c}$$

Das bedeutet also, dass $\Phi\left(\frac{980-\mu}{3}\right) = 1 - \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\mu - 980}{3}\right) = \gamma$

Stochastik - Kapitel 4

a) $\gamma = 0,95 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mu - 980}{3} = 1,645 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = 984,935}}$

b) $\gamma = 0,99 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mu - 980}{3} = 2,326 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = 986,96}}$

2. Beispiel:

Eine Kaffeepulverdose besitzt ein bestimmtes Gewicht (in g). Das Gewicht dieser Dose sei durch die Zufallsvariable X beschrieben, welche $N(20;\ 2,5)$ - verteilt ist.
Die Füllmenge (in g) Y sei unabhängig vom Dosengewicht $N(500;\ 6)$ - verteilt.

a) Wir nehmen an, dass ein Überlaufen der Dose beim Abfüllvorgang nicht möglich ist.
Das Gesamtgewicht wird deshalb durch die Zufallsvariable $X + Y$ beschrieben.
Wie sehen nun der Erwartungswert und die Varianz aus ?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht einer zufällig ausgewählten Dose größer ist als 530 ?

Lösung zum 2. Beispiel:

a) $E(X+Y) = 20 + 500 = 520$

$Var(X+Y) = 2,5^2 + 6^2 = 42,25$

$\Rightarrow N(520;\ \sqrt{42,25})$

b) $P(X+Y \geq 530) = 1 - P(X+Y \leq 530) = 1 - \Phi\left(\dfrac{530-520}{\sqrt{42,25}}\right) \approx 1 - \Phi(1,54) \approx 0,062$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\underline{\underline{6,2\%}}$.

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben I

1. Eine Bäuerin hat noch 20 Eier in ihrer Vorratskammer. Drei davon sind verdorben.
Um einen Kuchen zu backen wählt sie zufällig vier Eier aus.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der verdorbenen Eier unter den vier ausgewählten.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Zeichne nun das dazugehörige Stabdiagramm und die Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

c) Berechne die Standardabweichung σ und den Erwartungswert μ.

2. Robert liebt das Wetten. Jedesmal wenn er sieben Menschen an einem Ort zusammen sieht wettet er mit jeder Person die dazu bereit ist, 200:1, dass sich darunter mindestens zwei Menschen befinden, die am gleichen Wochentag geboren sind.
Handelt es sich für Robert um eine günstige Wette ? Entscheide dich mit Hilfe einer Rechnung !

3. Wie viele Rosinen muß ein Bäcker in 1kg Teig mischen, damit in einem 50 g schweren Brötchen mit einer nicht kleiner als 99%igen Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Rosine ist ?

4. Sepp und Fred haben im zollfreien Gebiet zu viele zollfreien Zigaretten und auch zuviel Alkoholika gekauft. Sie sind mit einer Reisegruppe (25 Personen) unterwegs, die an der Grenze angibt keinerlei Schmuggelware bei sich zu haben. Die Zöllner führen trotzdem Stichproben-Durchsuchungen durch. Aus der Reisegruppe suchen sie sich das Gepäck von drei Personen aus und durchsuchen es.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) werden weder Sepp noch Fred ausgewählt ?

b) werden Sepp und Fred erwischt ?

c) wird nur Fred beim Schmuggeln ertappt ?

5. Aus Spaß werden Faschingskrapfen häufig mit Senf gefüllt. Lehrling Lars hat allerdings übertrieben und in 40% aller Krapfen Senf eingespritzt. Der Meister Müller überprüft die Arbeit von L und schneidet solang Krapfen auf, bis er zwei mit Senf gefüllte findet. Höchstens schneidet M allerdings fünf Krapfen auf.
X sei die Anzahl der aufgeschnittenen Krapfen.

a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.

b) Berechne den Erwartungswert $E(X)$, die Varianz $Var(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsgröße X.

c) In einem Korb liegen 50 der von L bearbeiteten Krapfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter mindestens 15 und höchstens 25 mit Senf gefüllte Krapfen befinden ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben I

6. Ein Zufallsexperiment gelingt mir einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$.

a) Der Versuchsleiter führt eine Serie von sechs Versuchen durch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingen alle sechs Ausführungen des Zufallsexperimentes ?

b) Wie viele solcher Sechserserien muss der Versuchsleiter mindestens durchführen, wenn er mit mehr als 90%iger Wahrscheinlichkeit wenigstens eine komplette Serie mit sechs gelungenen Versuchsausführungen erhalten will ?

7. Eine Umfrage hat ergeben, dass es in unserer Bevölkerung 4% farbenblinde Menschen gibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter 200 Personen höchstens 7 Farbenblinde zu finden ?

b) Wie viele Personen müssen mindestens untersucht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens eine farbenblinde Person zu finden ?

8. Im Brieftaubensport ist es üblich, dass ein Expertengremium darüber entscheidet, welche Brieftauben zur Zucht verwendet werden dürfen. Es stehen fünf Prüfer zur Verfügung, von denen drei als „normal“ und zwei als „sehr streng“ bekannt sind. Jede Taube wird von zwei Prüfern bewertet, die vorher durch das Los entschieden werden.
X sei die Anzahl der strengen Prüfer.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und die Verteilungsfunktion F.

b) Berechne den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$ der Zufallsgröße.

9. Der Erwartungswert $E(X) = \mu = 100$ und die Varianz $Var(X) = \sigma^2 = 64$ einer Zufallsvariable X seien bekannt.

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

(1) $2 \cdot X + 4$ (2) $4 \cdot X - 400$ (3) $\dfrac{X - 100}{8}$

b) Berechne von folgenden Zufallsvariablen den Erwartungswert.

(1) X^2 (2) $2 \cdot X^2 + 4$ (3) $(X - 1)^2$

10. In einer Kiste befinden sich 50 Werkstücke. Es haben sich darunter 9 fehlerhafte Stücke eingeschlichen. Ohne Zurücklegen entnimmt Hans nun zufällig zehn Stücke.
X sei die Anzahl der fehlerhaften Stücke in der Stichprobe.

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie lauten diese beiden Kenngrößen aus a) beim Ziehen mit Zurücklegen ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

1. In der Zeit von 13.55 Uhr bis 14.00 Uhr passieren in einem Kaufhaus noch einige Kunden schnell die Kasse, bevor sie zurück zu Ihrer Arbeitsstelle müssen. Die Anzahl dieser Kunden ist poissonverteilt mit $\lambda = 5$.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem oben genannten Zeitraum an einem ganz bestimmten Tag

(1) keine Kunden die Kasse passieren ?

(2) mehr als fünf Kunden noch schnell einen Einkauf tätigen ?

(3) zwei oder drei Kunden die Kasse passieren ?

b) Der Geschäftsführer des Kaufhauses beobachtet während der nächsten 30 Tage das Verhalten an den Kassen für die oben genannte Zeit.

(1) Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der genannten Zeitabschnitte an, in denen mehr als fünf Kunden die Kasse passieren. Um welche Verteilung handelt es sich ?

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies an mehr als zehn Tagen eintritt ?

2. Bei einer Karnevalsveranstaltung werden zufällig 500 Personen befragt.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens eine am Tag der Veranstaltung Geburtstag hat.

3. Ein neuer Roman umfasst insgesamt 400 Seiten. Leider sind 40 Druckfehler enthalten. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die 5. Seite des Romans mehr als einen Druckfehler enthält.

4. Telefonate die in einem nicht zu groß gewählten Zeitintervall geführt werden sind poissonverteilt. In einem Call-Center gehen im Durchschnitt 5 Anrufe pro Stunde ein.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) innerhalb einer Stunde drei Anrufe im Call-Center eingehen.

b) innerhalb von 40 min drei Anrufe im Call-Center eingehen.

5. Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Zufallsvariablen X und Y habe die folgenden Werte:

X \ Y	1	2	3
1	0,1	0,3	0,2
2	0,1	0,1	0,2

a) Berechne den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

b) Berechne danach jeweils den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Z_1 = X + Y$ und $Z_2 = X \cdot Y$.

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

6. Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und haben die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x	1	2	3
$P(X=x)$	0,4	0,5	0,1

y	0	1
$P(Y=y)$	0,6	0,4

a) Berechne den jeweiligen Erwartungswert und die jeweilige Varianz sowie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b) Berechne anschließend die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z = X + Y$.

7. Aufgrund langjähriger Erfahrung weiß ein Versicherungsunternehmen, dass im Mittel 1‰ der Versicherten pro Jahr in einen Unfall verwickelt werden. Der gesamte Versicherungsbestand beläuft sich auf 3000 Kunden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 7 Versicherte während eines Jahres in einen Unfall verwickelt sind ?

8. Ein Pharmazkonzern bringt ein neues Medikament auf den Markt. Mit der Wahrscheinlichkeit von 0,001 tritt bei diesem Medikament die Nebenwirkung „Übelkeit“ auf. 2000 Patienten nehmen diese Medizin nun ein.

Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei k Patienten Übelkeit auftritt für $k = 0, 1, ... 7$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als sieben Personen die genannte Nebenwirkung auftritt ?

9. Wir nehmen an, dass der geübte Sportschütze Thomas bei einem Schuß, das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 trifft. Thomas bietet seinen Freunden eine Wette an: Er schießt 20 mal auf die Zielscheibe. Sollte er bei diesen 20 Schüssen mindestens 17 Treffer landen, erhält er 100 Euro. Gelingt ihm das nicht, muss er selbst 500 Euro bezahlen.

a) Wie hoch ist die Gewinnerwartung von Thomas ?

b) Wie darf der Betrag höchstens sein den Thomas im Falle eines Verlustes zahlt, damit er auf Dauer nicht verliert ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben II

10. Ein L-Tetraeder ist auf den Seitenflächen durch die Ziffern 1,2,3,4 gekennzeichnet. Der Mathelehrer wirft den Tetraeder nun solange, bis die erste 1 auf der Standfläche erscheint, höchstens jedoch fünfmal.
Die Zufallsvariable X sei dabei die Anzahl der Versuche.
Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne $E(X)$, $Var(X)$ und $\sigma(X)$.

11. Als Eintrittsnachweis für eine Karnevalsveranstaltung sollen die Besucher an der Eingangstüre eine blinkende Anstecknadel erhalten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5% ist eine solche Nadel defekt und blinkt nicht. In weiser Voraussicht, haben die Veranstalter mit dem Hersteller der Nadeln vereinbart, dass sie die Lieferung zurückweisen können, wenn in einem Karton mit 500 Anstecknadeln mindestens fünf defekte zu finden sind. Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das die Veranstalter die Lieferung zurückgeben! Verwende dazu als Näherung der Binomialverteilung die Poissonverteilung.

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben III

1. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt und besitze folgenden Erwartungswert und folgende Varianz:

$\mu = 105$; $\sigma^2 = 100$

Berechne die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(X \leq 100)$

b) $P(X > 106)$

c) $P(|X - 105| > 30)$.

2. Eine Maschine packt Chips in dafür vorgesehene Tüten ab. Die Gewichte seien normalverteilt. Die Standardabweichung $\sigma = 3$ ist immer konstant, während der Erwartungswert μ eingestellt werden kann. (Anm: Daran kann man erkennen, dass σ von der für μ gewählten Einstellung unabhängig ist.)

Auf jeder Packung Chips ist als Mindestgewicht 1000 g eingeprägt.

Wie muß der Inhaber der Firma nun μ einstellen, damit bei

a) 95%

b) 99%

c) 99,9% der Packungen die Einprägung (Mindestmenge 1000 g) auch wirklich zutrifft ?

3. Im Supermarktregal stehen Mehlpakete mit der Aufschrift „Mindestgewicht 980g“. Diese Pakete seien ungefähr $N(985;\ 4)$-verteilt.

Hausfrau Maria will für einen Geburtstag mehrere Kuchen backen und hat deshalb vor 10 Pakete Mehl zu kaufen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein von Maria zufällig ausgewähltes Paket leichter ist als 980g ?

b) Wie ist das Gesamtgewicht der gesamten 10 Pakete (unter der Annahme der Unabhängigkeit) verteilt ?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht geringer ist als 9800 g ?

4. Die Kollegstufe schreibt eine Geschichtsklausur, bei welcher die Anzahl der Punkte, die maximal erreicht werden kann ungefähr normalverteilt ist. Der Erwartungswert liegt bei $\mu = 22$ und die Streuung bei $\sigma = 6$.

Der Lehrer hat sich zum Ziel gesetzt, dass während seiner gesamten Schullaufbahn im langjährigen Durchschnitt immer ca. 10% der Schüler die Note „Eins“ erhalten.

Ab welcher Punktezahl sollte er, unter Berücksichtigung dieses Zieles, dann die Note „sehr gut“ vergeben ?

Stochastik - Kapitel 4

Aufgaben III

5. Leere Wasserflaschen eines bekannten Herstellers besitzen ein normalverteiltes Gewicht, den Erwartungswert $\mu = 100$ g und die Standardabweichung $\sigma = 5$ g.
Die Abfüllung der Flaschen läuft nach einem bestimmten Schema ab:
Die leeren Flaschen werden nacheinander auf eine Waage gestellt. Die Zufuhr von Wasser wird erst dann gestoppt, wenn als Gesamtgewicht 610 g erreicht sind.
Man nehme an, dass die Flaschen ausreichend groß sind und ein Überlaufen deshalb unmöglich ist.

a) Gib die Verteilung der Zufallsgröße *X* des Füllgewichtes an, wenn das Gesamtgewicht (Flaschen + eingefülltes Wasser) exakt 610 g beträgt !

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt mindestens 500 g beträgt ?

c) Durch einen technischen Mangel kann der Zulauf beim Erreichen des Gesamtgewichtes von 610 g (= Grenze) nicht abrupt gestoppt werden.
Die Wassermenge, die nach dem Erreichen dieser Grenze noch in die Flasche hineinläuft, habe die Verteilung $N(3;\ 0{,}5)$.
Welche Verteilung hat nun unter diesen Umständen das Füllgewicht ?

6. Eine Maschine stellt Werkstücke einer bestimmten Länge her.
Die Zufallsvariable *X* beschreibe diese Länge und sei normalverteilt mit $\mu = 30$ mm und einer Standardabweichung von 0,04 mm.
Ein Werkstück ist genau dann Ausschuss, wenn seine Länge vom Sollwert 30 mm mehr als 0,1 mm abweicht.

a) Gib an, mit wie viel Prozent Ausschuss der Firmeninhaber auf die Dauer rechnen muss !

b) Auf Grund eines technischen Problems hat sich μ um 0,03mm vergrößert.
Die Standardabweichung ist dagegen unverändert geblieben.
Wie hoch ist jetzt der Ausschuss (Angabe in Prozent !) ?

