Vorbereitung zur 1. Mathematikschulaufgabe

1. Semester

O) Nullstellen rationaler Polynome höheren Grades als x^2 durch Probieren ermitteln.

a) Ganzzahlige Polynome mit Koeffizient 1 vor der höchsten Potenz

In Übungsaufgaben oder Schulaufgaben besitzen Funktionen höheren Grades oft ganzzahlige Lösungen (Nullstellen). Natürlich funnktioniert diese Methode nicht bei jedem Polynom sondern nur bei denen die auch ganzzahlige Lösungen besitzen.

z.B. $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ hat die Nullstelle $x_0 = 1$.

Diese Lösung kann durch Raten und Probieren gefunden werden, indem man nacheinander $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ usw. in die Gleichung einsetzt.
Hat die Funktion einen konstanten Teil (einen reinen Zahlenwert ohne x), so ist die Nullstelle - sofern sie ganzzahlig ist - Teiler dieser Zahl.

z.B. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Teiler und somit potenzielle Nullstellen sind $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

Diese Eigenschaft gilt jedoch nur, wenn der x-Term mit der höchsten Potenz den Koeffizienten 1 hat (also x^3 und nicht z.B. $4x^3$)

Koeffizient = 1

Mit Hilfe der Polynomdivision (eigenes Kapitel) kann bei bekannter Nullstelle das Polynom um einen Grad reduziert werden, d.h. der größte Exponent wird z.B. von x^3 auf x^2 reduziert.

Beispiel zur Nullstellenbestimmung:

$x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60 = 0$

Teiler von 60: jeweils $\pm$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60

Einsetzen	Ergebnis	
+1	36	
-1	48	
+2	0	1. Nullstelle für x = 2
-2	0	2. Nullstelle für x = -2
+3	0	3. Nullstelle für x = 3
-3	-60	

usw.

Vorbereitung zur 1. Mathematikschulaufgabe

1. Semester

b) Polynome mit gebrochenen Koeffizienten und / oder der Koeffizient vor der höchsten Potenz ist nicht 1:

Ist ein Polynom mit gebrochenen Koeffizienten vorgegeben, dann ist mit dem Hauptnenner zu multiplizieren.

Gegeben ist z.B. das Polynom $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = 0$.

Hier multipliziert man mit dem Hauptnenner 8 und erhält die Gleichung

$$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0.$$

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz ist 2, das absolute Glied ist -1.

Als mögliche Nullstellen kommen nun die rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ in Frage, deren Zähler a ein Teiler des Absolutgliedes ist und deren Nenner b ein Teiler des Koeffizienten mit der höchsten Potenz ist.

Im obigen Beispiel ist der Koeffizient der höchsten Potenz 2.
Teiler von 2 sind die 1 und die 2.

Das Absolutglied ist -1. Teiler von -1 sind 1 und -1.

Somit sind folgende Zahlen auszuprobieren: 1, -1, $\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}$.

Die rationalen Nullstellen von $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$ sind 1 und -$\frac{1}{2}$.

