Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(L) Exponentialgleichungen, Logarithmusgleichungen

Grundlagenwissen: Rechenregeln zur Exponential- und Logarithmusrechnung.

Hinweise und Formelsammlung siehe Seite 3 - 5

1. Berechnen Sie x.

a) $2^{x+1} = 3 \cdot 3^{x}$

b) $4 \cdot 9^{x+1} = 2 \cdot 27^{x-1}$

c) $6 \cdot 4^{1,5x} - 9^{2,5} = 4 \cdot 2^{3x}$

d) $2^{x+1} - 3 = -2^{x+2}$

e) $2^{x} + 2^{x+2} = 4$

f) $3^{x+1} \cdot 7^{x} = 81$

g) $2^{6x-5} + 3 \cdot 4^{3x-2} - 8^{2x-1} = 384$

h) $a^{\frac{2x}{9-x}} - \left(a^{-2}\right)^{0,5x-2} = 0$

i) $\sqrt{3^{4x-4}} = \frac{1}{3} \cdot 3^{x+1}$

k) $1,88 \cdot 2,9^{3x-2} = 61,1 \cdot 1,8^{3-x}$

l) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{11x+9}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$

m) $\frac{2^{3x} \cdot 68^{x-3}}{5^{2x-1}} = \frac{10,24}{62,5}$

n) $3^{x} - 2^{x-1} = 2^{x} + \frac{1}{9} \cdot 3^{x-1}$

o) $3 \cdot 4^{x} - 7^{x+2} = 7^{x+2}$

p) $3^{2x+1} - 2^{x+2} = -3^{2x+2}$

q) $4^{2x+1} + 16 = 65 \cdot 4^{x}$

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(L) Exponentialgleichungen, Logarithmusgleichungen

2. Lösen Sie die Gleichung nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\log_3(x+4) - \log_3 x - 2 = 0$

b) $\log(x+2) + \log x - \log 3 = 0; \quad D_{(x)} = \mathbb{R}^+$

c) $\lg x^3 + \lg x^2 = 10$

d) $\lg(4x) + \lg\frac{x}{5} = 1 + \lg 2$

e) $\lg(x+1) - 2\lg x = \lg 6$

f) $\frac{1}{\lg x} + 0{,}5 = \frac{1}{2}\lg x$

g) $2\lg x + \frac{1}{\lg x} = 3$

h) $2\lg(x-2) - \lg(2x+3) = \lg 3$

i) $4 \cdot \lg(x^3) + 5 \cdot \lg(x^5) = 111$

k) $3 \cdot \lg x = 7 - \lg\sqrt{x}$

Hinweise und Formelsammlung siehe Seite 3 - 5

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(L) Exponentialgleichungen, Logarithmusgleichungen

Eine Gleichung höheren Grades wie z. B.

$$x^4 = 3$$

kann nach x aufgelöst werden, indem man die Wurzel zieht.

$$x^4 = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[4]{3}$$

Tritt die Unbekannte x jedoch im Exponenten einer Potenz auf, spricht man von einer Exponentialgleichung, wie z. B. bei

$$3^x = 5\,.$$

Jede Exponentialgleichung $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ besitzt genau eine Lösung.

Für die Lösung dieser Exponentialgleichungen, d. h. für den Wert x hat man den Namen: Logarithmus von b zur Basis a eingeführt (Die Buchstaben a bzw. b sind beliebig wählbar).

Logarithmusdefinition:

$$\boxed{a^x = b \;\Leftrightarrow\; x = \log_a b} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}^+;\ a \neq 1$$

x ist der Logarithmus von b zur Basis a.

Der Logarithmus $\log_a b$ ist also nichts anderes als der Exponent in einer Exponentialgleichung, statt $a^x = b$ könnte man auch $a^{\log_a b} = b$ schreiben.

($\log_a b$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten)

b ist die Zahl die zu logarithmieren ist, sie wird Numerus genannt.
a ist die Basis (der Potenz a^x).

Eine Anmerkung zur Schreibweise:
Eigentlich müsste man $\log_a(b)$ schreiben. Man kann die Klammer weglassen, wenn keine Missverständnisse aufkommen.
z. B. $\log_a b \cdot c$ ist missverständlich, also muss hier $\log_a(b \cdot c)$ geschrieben werden

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(L) Exponentialgleichungen, Logarithmusgleichungen

Rechengesetze für das Logarithmieren

Die Rechengesetze haben für jedes Logarithmensystem Geltung; d. h. sie können immer da angewendet werden, wo Logarithmen auf die gleiche Basis bezogen werden.

Multiplizieren

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c \quad b, c \in \mathbb{R}^+$$

$$\log_a(b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n)=\log_a b_1+\log_a b_2+\ldots+\log_a b_n$$

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Dividieren

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Potenzieren

$$\log_a(b^c)=c\cdot\log_a b$$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Logarithmus der Basis und dem Exponenten.

Radizieren

$$\log_a\sqrt[n]{b^m}=\frac{m}{n}\cdot\log_a b$$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Produkt aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

Radizieren ist kein eigenes Logarithmengesetz. Es handelt sich um Potenzieren mit rationalem Exponenten. (Rationale Zahlen sind die Menge aller Brüche der Form m/n)

Sonderfälle und besondere Logarithmen

$\log_a a=1$	$\log_a 1=0$	$\log_a(a^n)=n$	$a^{\log_a b}=b$
$\lg 10=1$	$\lg 1=0$	$\lg(10^n)=n$	$10^{\lg b}=b$
$\ln e=1$	$\ln 1=0$	$\ln(e^n)=n$	$\log_{a^n} a=\frac{1}{n}$
$\text{lb}\, 2=1$	$\text{lb}\, 1=0$	$\text{lb}(2^n)=n$	$\log_a\left(\frac{1}{a}\right)=-1$

$\log_a b=\log_c b\cdot\log_a c$	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$	$\log_a\frac{b}{c}=-\log_a\frac{c}{b}$	$\log_{\frac{1}{a}} b=\log_a\frac{1}{b}$

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(L) Exponentialgleichungen, Logarithmusgleichungen

Vorzeichen und Logarithmensymbole

log: - in deutschen Büchern Logarithmen zu einer beliebigen Basis
- auf amerik. Taschenrechnern und Literatur Logarithmus zur Basis 10

lg: Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer, Briggscher oder Zehnerlogarithmus)

ln: Logarithmus zur Basis e = 2,71828… (natürlicher Logarithmus)

lb: Logarithmus zur Basis 2 (binärer oder dualer Logarithmus)

Umrechnung von einem System in ein anderes
Berechnung beliebiger Logarithmen (mit Taschenrechner)

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

mit x als beliebige Basis;
insbesondere x = 10 oder x = e

$$\log_{13} 353 = \frac{\lg 353}{\lg 13} = \frac{\ln 353}{\ln 13} = 2{,}287...$$

Natürliche Logarithmen

Basis $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ $\qquad e = 2{,}718281828...$ (Eulersche Zahl)

$\boxed{\log_e \triangleq \ln}$ $\qquad \boxed{\ln a = x \Leftrightarrow a = e^x}$

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \ln a \cdot \lg e$$

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

Beim Rechnen mit Logarithmen sei auf folgende Fehler hingewiesen:

$\log_a(b+c) \neq \log_a b + \log_a c \quad (\log_a(b+c)$ ist nicht weiter auflösbar$)$

$\log_a(b-c) \neq \log_a b - \log_a c$

$\log_a b + c \neq \log_a(b+c)$

$\log_a(b^n) \neq (\log_a b)^n$

$\log_a b \cdot \log_a c \neq \log_a(b\cdot c)$